数学散歩　ＸⅢ-3　　　　　　　２０２０．７．　γ　　岐阜市　村山錞司

一般の数学啓蒙書から---

「BLUE BACKS 大学入試問題で語る数論の世界 清水健一 講談社」 分館 BC412C (3/3)

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜前回の訂正＞「IME で…」について ｷｰﾎﾞｰﾄﾞで「DI とすれば ぢ、ヂ、乳…」、「ZI とすれば じ、ジ、痔…」恥ずかしいことです…！！！

＜気になった「重複組合せ ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$ 」について＞

「数学散歩 Ⅸ-19 2018.11. α」で紹介した「確率・統計 会田・板垣」を参考にまとめ直してみた。

＜問題、略解、解説など＞

第６章　単位分数

(2003 愛知教育大学) ＜単位分数で表す＞

与えられた分数 $\frac{a}{b}$ (a、b は $a < b$ の自然数)を相異なる単位分数 (分子が 1 の分数)

の和 $\frac{a}{b} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_k}$ (n_1、n_2、・・・、n_k は

$1 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ を満たす自然数) として表したときの n_1、n_2、・・・、n_k

を表示したい。

⑴ 「その数を超えない単位分数のうちの最大のものを引く」という考え方で 3/7 と 12/13 のそれぞれを相異なる単位分数の和として表せ。 ⑵ (省略)

(略解) ⑴ 逆数をとって、$7/3 = 2.33\cdots$ より $1/3 < 3/7 < 1/2$ 、$3/7 - 1/3 = 2/21$

次に $21/2 = 10.5$ より、$1/11 < 2/21 < 1/10$ 　$2/21 - 1/11 = 1/231$

∴ $\underline{3/7 = 1/3 + 1/11 + 1/231}$

同様にして、$12/13 - 1/2 = 11/26$ 、$11/26 - 1/3 = 7/78$ 、$7/78 - 1/12 = 1/156$

∴ $\underline{12/13 = 1/2 + 1/3 + 1/12 + 1/156}$

(2009 お茶の水女子大学) ＜2 つの単位分数の和＞

p を素数とする。x、y に関する方程式 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$ を満たす正の整数の組 (x,y) をすべて求めよ。

(略解) 与えられた方程式を変形して、$xy = p(x+y)$ より、$(x - p)(y - p) = p^2$

p は素数だから、$(x - p,\ y - p) = (1,\ p^2)$、$(p,\ p)$、$(p^2,\ 1)$ となるから

$(x,y) = (p + 1, p^2 + p)$、$(2p,\ 2p)$、$(p^2 + p, p + 1)$

(1999 津田塾大学)

次の命題Ａについて以下の問に答えよ。

命題Ａ:「 3 以上の自然数 n に対し、 $\frac{2}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ かつ、$0 < a < b$ となる自然数 a、b が存在する。」

⑴ 恒等式 $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$ を使って、n が 4 以上の偶数のとき命題Ａが成立することを示せ。

⑵ $n = 3$、5、7 のとき命題Ａが成立することを示せ。

⑶ n が 3 以上の奇数のとき命題Ａが成立することを示せ。

(略解) ⑴ 4 以上の偶数は、$n = 2(k+1)$ (k は自然数) とできる。

命題Ａにおいて、$n = 2(k+1)$ とすると、

$$\frac{2}{2(k+1)} = \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$ (与えられた恒等式で $x = k+1$ として)

∴ $a = k+2$、$b = (k+1)(k+2)$ とすればよい。

⑵ 恒等式から $\frac{2}{x} = \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x(x+1)}$ で $x = 3$、5、7 として、

$\frac{2}{3} = \frac{2}{4} + \frac{2}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$、 $a = 2$ 、$b = 6$ で成立。

$\frac{2}{5} = \frac{2}{6} + \frac{2}{30} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$、 $a = 3$ 、$b = 15$ で成立。

$\frac{2}{7} = \frac{2}{8} + \frac{2}{56} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$、 $a = 4$ 、$b = 28$ で成立。

⑶　3 以上の偶数は、$n = 2k+1$ （k は自然数）とできる。⑵の式で $x = 2k+1$ として、

$$\frac{2}{2k+1} = \frac{2}{2k+1+1} + \frac{2}{(2k+1)(2k+1+1)} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(2k+1)}$$

∴　$a = k+1$、$b = (k+1)(2k+1)$　とすればよい。

第７章　ゼータ関数

$\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$ はリーマンのゼータ関数と呼ばれている。

(2003 愛知教育大学)

⑴　任意の自然数 n に対して不等式 $\displaystyle\frac{1}{n+1} \leqq \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leqq \frac{1}{n}$

及び　$\log(n+1) \leqq 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$　が成り立つことを示せ。

⑵　任意の自然数 n に対して不等式 $\displaystyle\frac{1}{(n+1)^2} \leqq \int_n^{n+1} \frac{1}{x^2}\,dx \leqq \frac{1}{n^2}$

及び　$1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} \leqq 2 - \dfrac{1}{n}$　が成り立つことを示せ。

⑴（略）

⑵（略解）　$n \leqq x \leqq n+1$ のとき、$\dfrac{1}{(n+1)^2} \leqq \dfrac{1}{x^2} \leqq \dfrac{1}{n^2}$　より　$\displaystyle\frac{1}{(n+1)^2} \leqq \int_n^{n+1} \frac{1}{x^2}\,dx \leqq \frac{1}{n^2}$

$\displaystyle\frac{1}{(k+1)^2} \leqq \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$　　1 ～ n−1 を加えて

（感想として、 $\dfrac{1}{(k+1)^2} \leqq \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$　は当たり前に思えますが？）

$\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} \leqq 1 - \dfrac{1}{n}$　　1 を加えて

$1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} \leqq 2 - \dfrac{1}{n}$　　（参考：$\zeta\langle 2\rangle \leqq 2$ ）

(1992 大阪大学)

2 以上の自然数 n について、 $\dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + \cdots + \dfrac{1}{n^3} < \dfrac{1}{4}$　が成り立つことを示せ。

（略証）　$k > 1$ のとき、$k^3 > k^3 - k > 0$ を利用して、

$$\frac{1}{k^3} < \frac{1}{k^3-k} = \frac{1}{k(k-1)(k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k-1)} - \frac{1}{k(k+1)}\right)$$

$k = 2$ から $k = n$ まで加えて

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} < \cdots = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)}\right) < \frac{1}{4}$$

（参考： 1 を加えて　$\zeta\langle 3\rangle < \dfrac{5}{4}$ ）

<重複組合せ> n 個の異なる数 1.2.3,…,n から繰り返しとることを許して r 個とる組合せの数は ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$ である。（本では 3 通りのやり方で説明があるが、その中から・・・）

（参考）H は homogeneous product の頭文字。$(x+y+z)^4$ の展開式の項の数は ${}_3H_4$ になる。

（説明）　r 個とって小さい順に並べる。　　11…11,　11…12,　…　n−1 n … n n,　　n n … n n,
　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　−r個−　−r個−　…　− r個 −　　− r個 −

異なる数字の並びになるように　12…r−1r,　12…r+1,　…　n−1… n+r−1,　n n+1… n+r−1,
+ 0,1,2,…,r−1 を加える　　　　−r個−　−r個−　…　− r個 −　　− r個 −

1,2,3,…,n+r−1 の n+r−1 個から異なる r 個とった（小さい順の並び）組合せができる。

（例）　異なる 3 個の数 1,2,3 から繰り返しとることを許して 4 個とる組合せの数。

	1 1 1 1	1 1 1 2	1 1 1 3	1 1 2 2	1 1 2 3	1 1 3 3	1222 1223 1233 1333 2222 2223 2233	2 3 3 3	3 3 3 3
+)	0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3	+ 0123	0 1 2 3	0 1 2 3
	1 2 3 4	1 2 3 5	1 2 3 6	1 2 4 5	1 2 4 6	1 2 5 6	1345 1346 1356 1456 2345 2346 2356	2 4 5 6	3 4 5 6

（参考）　${}_3H_4 = {}_6C_4 = 15$　　（宿題）　$(x+y+z)^4$ ： x^4 y^4 z^4 x^3y x^3z xy^3 xz^3 y^3z yz^3
x^2y^2 y^2z^2 z^2x^2 x^2yz xy^2z xyz^2 の係数は？