数学散歩　ⅩⅢ-4　　　　　　　２０２０．８．　α　　岐阜市　村山錞司

一般の数学啓蒙書から---

「数学まちがい大全集 ｱﾙﾌﾚｯﾄﾞ・S・ﾎﾟｻﾏﾝﾃｨｴ / ｲﾝｸﾞﾏｰﾙ・ﾚｰﾏﾝ

堀江太郎（訳）　化学同人」　本館 YA 410ﾎﾟ

表紙の副題「誰もがみんなしくじっている！」が気になり、手にした本である。面白そうな記事など、気ままに拾って紹介する。

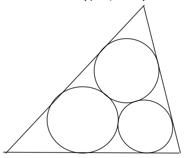
ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜記事、解説・略解など＞

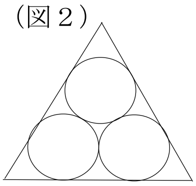
①　有名な数学者が犯した注目すべきまちがい

- アリストテレスが提唱し、結果的にまちがっていた予想、いくつかから
  ＊　蝿は４本の足をもっている　　＊　女性は男性より歯の本数が少ない　・・・
- ニュートンのとてつもない予想　「世界は 2060 年をもって終末を迎える」
- マルファッティ（イタリア 1731 ～ 1807 ）による問題のたてまちがい
  「与えられた三角形の中に互いに接する３つの円を置くとき、３つの円の面積の和が最大になるのはどのような場合か」⇒「３つの円が互いにすべて接し、各円が三角形の二辺に接するような置き方が面積の和が最大である」と主張した。

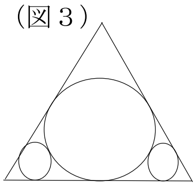
（図１）



（図２）



（図３）



私の疑問点１：　「互いに接する」とは、図３のように２つの円が離れていてもよいか？
（２つずつ接していればよい、と解釈した。）

〃　疑問点２：　三角形が与えられたとき、主張にあるような「３つの円が互いにすべて接し、各円がそれぞれ三角形の二辺に接する」ような作図（図１）はどうしたらできるか？
（３つの円の半径の長さが連動していると考えられるが。２つの円はよいが、３つ目の円はどうか？　逆に、互いに接する３つの円に外接する三角形の作図は可能。）

本では、いろいろな解説がされているが、ここでは正三角形について次の２つの場合について、本を参考にしてまとめてみた。

「一辺の長さが 1 である正三角形内にある３つの接する円の面積の和について、正三角形に対する占有率を調べる。」

(A)　半径の長さが等しい３つの円が互いに接し、それぞれ３つの円が正三角形の２辺に接する場合。（図２）

(B)　１つの円は正三角形の内接円で、他の２つの円は正三角形の２つの隅に内接円と正三角形の２辺に接するようにした場合。（図３）

(略解)　○　正三角形の面積　$S = \sqrt{3} / 4$

(A)　①　３つの円の半径 r は、　$r = (\sqrt{3} - 1)/4$

②　３つの円の面積の和 S_1 は、　$S_1 = (3\pi / 8) \cdot (2 - \sqrt{3})$

③　占有率は、$S_1 / S = (2\sqrt{3} - 3)\pi / 2 \fallingdotseq 0.729$　（約 73 %）

(B)　①　内接円の半径を R 、２つの小円の半径を t とすると、$R = \sqrt{3} / 6$、$t = \sqrt{3} / 18$

②　３つの円の面積の和 S_2 は、　$S_2 = (11 / 108)\pi$

③　占有率は、$S_2 / S = \{(11\sqrt{3} / 81\}\pi \fallingdotseq 0.739$　（約 74 %）

以上より、(B) の方が占有率が大きいから、予想は誤っている。

：（1929 ﾛﾌﾞとﾘｯﾁﾓﾝﾄﾞによる衝撃的な事実の発見）一般の三角形において・・・。

(1992 V・AｻﾞﾙｶﾞﾗｰとG・A・ﾛｽの完全な証明)「３つの円のうち一番大きなものを三角形の内接円に、残り２つの円を三角形の隅に内接円と三角形の２辺に接するように置く方法」

②　算数におけるまちがい

- 奇妙な指数計算

$2^5 \times 9^2 = 32 \times 81 = 2592$

$8^2 - 2^2 = 64 - 4 = 60 = 82 - 22$

$9^2 - 1^2 = 81 - 1 = 80 = 92 - 12$

・・・　（一般化できない！）

(表2.6 の一部から)

$4^1 = 4$

$(8 + 1)^2 = 81$

$(5 + 1 + 2)^3 = 512$

$(2 + 4 + 0 + 1)^4 = 2401$

・・・

③　代数における間違い

「モーゼの１０戒」にちなんで「１１番目の戒律」－－－ 0 で割ること

（一例として）　$a = b \to a\underline{b} = \underline{b^2} \to ab \underline{- a^2} = b^2 \underline{- a^2} \to a(\underline{b - a}) = (b + a)(\underline{b - a})$

$\to a = b + a$ 、$a = b$ だったから $b = b + b = 2b \to 1 = 2$

本では、その他いろいろな例があげられている。

$$\frac{3x - 30}{11 - x} = \frac{x + 2}{x - 7} - 4 \to \frac{3x - 30}{11 - x} = \frac{3x - 30}{7 - x}$$

分子が等しいから、$11 - x = 7 - x \therefore 11 = 7$

「1、2、4、8、16 に続く数は何か」に対して「次の数は 32 ではなく、31 が正解だ」

（例１）

元の数列 $\{a_n\}$	1	2	4	8	16	31	57	…
第１階差 $\{b_n\}$	1	2	4	8	15	26	…	
第２階差 $\{c_n\}$	1	2	4	7	11	…		
第３階差 $\{d_n\}$	1	2	3	4	…			
第４階差 $\{e_n\}$	1	1	1	…				

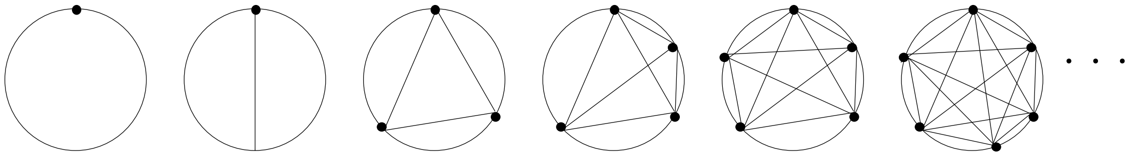
$e_n = 1$ 、 $d_n = n$ 、 $c_n = 1 + n(n - 1) / 2 = (n^2 - n + 2) / 2$ 、

$b_n = \cdots = (n^3 - 3n^2 + 8n) / 6$ 、

$a_n = \cdots = (n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24) / 24$　　$a_6 = 31$ 、$a_7 = 57$ 、・・・

（例２）　１つの円の周上にいくつかの点をとって、各２点どうしを線分でつなぐ。３本以上の線分が１点で交わることがないとすると、円はいくつの領域に分けられるか？

1　2　3　4　5　6



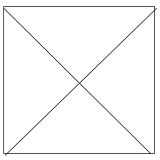
1　2　4　8　16　31

（例３）　パスカルの三角形

1	1 = 1
1　1	1+1 = 2
1　2　1	1+2+1 = 4
1　3　3　1	1+3+3+1 = 8
1　4　6　4　1	1+4+6+4+1 = 16
1　5　10　10　5　1	5+10+10+5+1 = 31
1　6　15　20　15　6　1	15+20+15+6+1 = 57

④　幾何学におけるまちがい

「どの答えが正しい」



左図の図形について

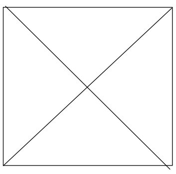
次の答のうち、まちがっているものを選べ。

①　対角線を引いた正方形

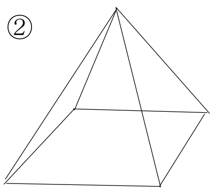
②　底面が正方形のピラミッドを上からみたところ

③　正四面体を横からみたところ

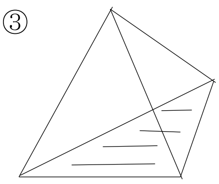
①



②



③



どの答えも
まちがってはいない。

⑤　確率・統計におけるまちがい

和が 999 になるような 2 つの素数の組をすべて見つけよ。

２つの正整数の和が奇数の 999 だから、２つの数は奇数と偶数。偶数で素数になるのは 2 のみだから、$999 = 2 + 997$ ・・・　$\sqrt{997} = 31.5753\cdots$

997 は 31 以下の素数で割れない。997 は合成数でなく素数である。和は $2 + 997 = 999$