数学散歩　ＸⅢ-5　　　　　　　　　　　２０２０．８．　β　　岐阜市　村山錞司

一般の数学啓蒙書から---

「数学超絶難問 時代を超えて天才の頭脳に挑戦！ 小野田博一 日本実業出版社」　(1/3)

昔、市の図書館で目にし、難問、珍問（？）にひっかかり、つい本屋で買ってしまいましたが、手に負えない難物もあり、家の本棚に積読だけの本でした。でも、いつかはこの「数学散歩」でも機会があれば。今回、（自分なりに解けて（？））面白そうで楽しめる問をいくつか紹介します。ヒマツブシには最適（？）です。なお、問題文など変えたのもありますので、よろしく。

第１部から第３部までの Ｑ１ ～ Ｑ79 の 79 問と６つのコラムからなっています。

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜問題、解説など＞

第１部 アルキメデス登場！　（ Ｑ 1 から Ｑ 23 までの 23 問から）

Ｑ１　成功するまでの回数の期待値（必ず知っておきたいこと）

素潜り１回であなたがリュウグウノツカイと出会う確率がつねに p であるとする（ $p \neq 0$ ）。あなたがリュウグウノツカイに出合うまでに潜る回数の期待値は？

（私の解）　期待値を E とすると

$$
\begin{aligned}
E &= 1\cdot p + 2(1-p)\cdot p + 3(1-p)^2\cdot p + 4(1-p)^3\cdot p + \cdots \\
-)\ (1-p)E &= \qquad (1-p)\cdot p + 2(1-p)^2\cdot p + 3(1-p)^3\cdot p + \cdots \\
\hline
pE &= 1\cdot p + (1-p)\cdot p + (1-p)^2\cdot p + (1-p)^3\cdot p + \cdots \\
&= p / \{1-(1-p)\} = 1 \quad \therefore \quad E = 1/p
\end{aligned}
$$

Ａ１（本の解を参考に（以後、同様））

$$E = p\cdot 1 + (1-p)\cdot(1+E) = 1 + E - pE \quad \therefore \quad E = 1/p$$

（感想として）　逆に、n 回に 1 回出会えば確率は 1 / n になり、当り前のことですが？

Ｑ２　２種のカード（有名問題）

ある菓子の箱にはおまけとしてカードが必ず１枚入っています。カードは A と B の２種類あり、A の入っている確率は a 、B の入っている確率は b です（ $a \neq 0$、$b \neq 0$、$a + b = 1$）。その２種類がそろうまで、その菓子を買い続けるとします。あなたが買う菓子の個数の期待値は？

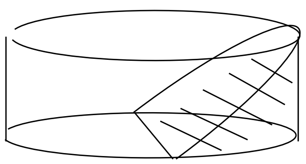
Ａ２　から　１回目は A か B のどちらか。１回目は A で２回目以後に B が出るまでか、その逆で、

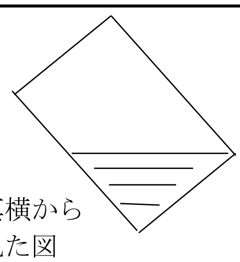
$E = a\cdot\{1 + (1/b)\} + b\cdot\{1 + (1/a)\} = 1 + (a/b) + (b/a)$（Ｑ１ より）

Ｑ４　アルキメデスの快挙（傾けた円柱の中の水）

図のような円柱形容器（底面の円の半径は１円柱の高さは１）があり、水がいっぱい入っていたが、容器を 45° 傾けたところ残った水は図のようになりました。残った水の体積は？

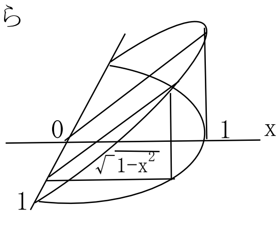
（実に、意外な答えです。）





真横から見た図

Ａ４　から



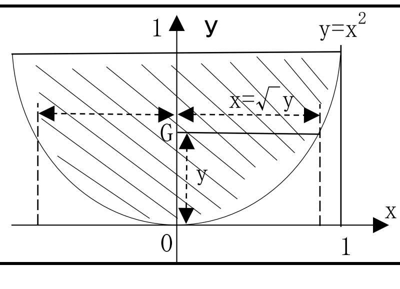
$$2\int_0^1 \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx = \frac{2}{3}$$

（本には、アルキメデスについての解説あり。）

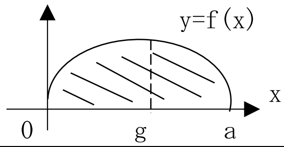
Ｑ８～Ｑ 14 は「重心」の問題 + Ｑ８ での 3 つの例題

Ｑ８　重心

アルキメデスはまた、いろいろな幾何図形の重心を求めた。そのうちの１つが右の図の放物線と直線でできている図形（斜線部分）の重心 (G) です。重心の位置は？



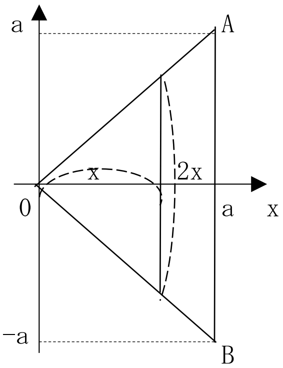
（本の解説から）



重心までの距離は

$$\frac{\int_0^a x\cdot f(x)\,dx}{\int_0^a f(x)\,dx}$$

（例題１）　右の図の二等辺三角形 OAB の重心は？
（三角形が上下対称だから、重心は x 軸上にあります。）



（答）

$$\frac{\int_0^a x\cdot 2x\,dx}{\int_0^a 2x\,dx}=\frac{2}{3}a \qquad \therefore\ \left(\frac{2}{3}a\ ,\ 0\right)$$

（Q 8 の答）

$$\frac{\int_0^1 y\cdot 2\sqrt{y}\,dy}{\int_0^1 2\sqrt{y}\,dy}=\frac{3}{5}$$

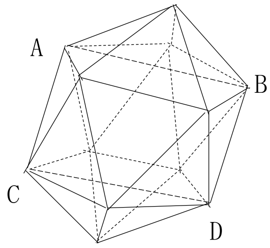
（参考）Q 9 半円（半円盤）の重心　Q 10 四分円の重心　Q 11 扇形の重心
Q 12 半円環（線状物体）の重心　Q 13 半球殻の重心　Q 14 弧（線状物体）の重心

Q 15　等面四面体の体積（基本問題）
３辺の長さが 6、7、8 である三角形 4 つからなる等面四面体の体積は？

（類題が 1996 年の東大、1999 年の京大の入試で出題されたとのこと）
（参考　等面四面体は、「数学散歩　Ⅷ-3 2017.10. α」で扱っています。四面体を包む直方体を考える。）

（答）$\frac{7\sqrt{374}}{4}$　（参考）$T=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$、$V=\frac{1}{3}\sqrt{(T-a^2)(T-b^2)(T-c^2)}$

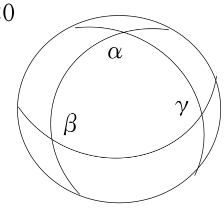
Q 16　正二十面体（基本問題）
１辺の長さが１の最も長い対角線の長さは ？



（参考　「数学散歩 Ⅸ-ﾗｽﾄ 2019.10. β」でも正二十面体を扱っています。）
（略解）
AB ∥ CD、AC ∥ BD、AD = BC より、四角形 ABDC は長方形。
AC = BD = 1、AB、CD の長さは 1 辺の長さが 1 の正五角形の対角線の長さで、$x(x-1)=1$ の解。

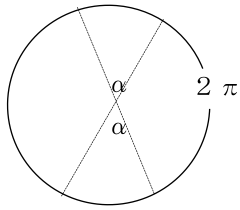
$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$　（∵ $x>0$）　　$AD=BC=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$

Q 20　球面三角形の面積



半径１の球面上に、左図のような球面三角形があります。
この球面三角形の面積は ？
（注　各辺は球の大円。求めるのは球表面の面積です。）

（略解）　α（西瓜の皮２枚）の占める面積は、
４π×（２α／２π）　＝　４α



球面三角形の面積を S とすると、
αとβとγの３つで（こちらと向こう側）６Sになり、球面全体より
４S分余分、４α＋４β＋４γ＝４π＋４S
S ＝ α＋β＋γ－π

第２部 中世から１８世紀へ　（ Q 24 から Q 54 までの 31 問から）

Q 25　ディオパントスの問題（その２）
x+2 と x+3 が両方とも正の平方数であるように有理数 x を求めよ。解は無限にあるが、そのうちの 1 つを示せば OK 。

（略解）　$\begin{cases} x+2=u^2 \\ x+3=v^2 \end{cases}$　より　$v^2-u^2=(v+u)(v-u)=1$　$v+u=2$、$v-u=1/2$ として
$(u,v)=(3/4\ ,\ 5/4)$ 、 $x=(3/4)^2-2=-23/16$

（参考：Q 24（その１）「16 を２つの正の（有理数の）平方数の和に分けよ。」（答の例 $(16/5)^2$ と $(12/5)^2$ ）

（余談）PDFﾌｧｲﾙが開かないときは、HPのﾀｲﾄﾙ「数学…」を右ｸﾘｯｸして Microsoft Edge から…