一般の数学啓蒙書から---

「数学超絶難問 時代を超えて天才の頭脳に挑戦！ 小野田博一 日本実業出版社」 (2/3)

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜問題、解説など＞

第２部 中世から１８世紀へ（続き）

Q 26　ペル方程式

$x^2 - 3y^2 = 13$ の整数解 (x,y) で $x > 100$ のものを求めよ。

（略解）（本の解を参考にして、左辺の $x^2 - 3y^2$ から）

$(a^2 - 3b^2)(x^2 - 3y^2) = a^2x^2 + 9b^2y^2 - 3(b^2x^2 + a^2y^2) = (ax + 3by)^2 - 3(bx + ay)^2$

を利用。　$a^2 - 3b^2 = 1$ を満たす正整数 a=2、b=1 を利用、上の式の前後を逆にして、

$(2x + 3y)^2 - 3(x + 2y)^2 = 1\cdot(x^2 - 3y^2) = 13$　として、

$\begin{cases} 2x + 3y = X \\ x + 2y = Y \end{cases}$ とすると、　$x^2 - 3y^2 = 13$ のとき、$X^2 - 3Y^2 = 13$ となって　(x,y) = (4,1) とし、順次繰り返し

(x,y) = (4,1) → (X,Y) = (11,6)、(x,y) = (11,6) → (X,Y) = (40,23)、

(x,y) = (40,23) → (X,Y) = (149,86)　　$x > 100$ より、x = 149、y = 86 （答）

Q 27　計算家の技法

ゲルソン（Levi ben Gerson 1288～1344）の「計算家の技法」の中の問題だそうです。

$1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \cdots + (1 + 2 + 3 + \cdots + n)$

$= \begin{cases} 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + n^2 & (n \text{ は奇数}) \\ 2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + n^2 & (n \text{ は偶数}) \end{cases}$　を証明せよ。

（本から　これはパズルとしてかなり面白いですね。）・・・（私の感想：ビックリです。）

（解説）　$\{(1+2+3 \cdots +(k-1))\}+\{1+2+3 \cdots +k\}$

$= k(k-1)/2 + k(k+1)/2 = k^2$　だから

k=1　$0+1 = 1^2$

k=3　$(1+2)+(1+2+3) = 9 = 3^2$

k=5　$(1+2+3+4)+(1+2+3+4+5) = 25 = 5^2$

・・・

$\{1+(1+2)+ \cdots +(1+2+3 \cdots +(n-1))\}$

’+)　$= n^2$

$1+(1+2)+ \cdots + (1+2+3+\cdots+n)$

$=1^2+3^2+5^2+\cdots+n^2$　(n は奇数)

k=2　$1+(1+2) = 4 = 2^2$

k=4　$(1+2+3)+(1+2+3+4) = 16 = 4^2$

k=6　$(1+2+3+4+5)+(1+2+3+4+5+6) = 36 = 6^2$

・・・

$+\{1+(1+2)+ \cdots +(1+2+3 \cdots +n)\}$

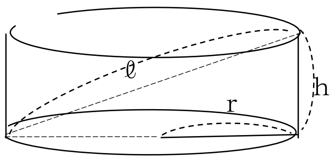
’+)　$= n^2$

$1+(1+2)+ \cdots + (1+2+3+\cdots+n)$

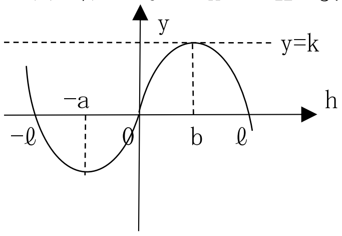
$=2^2+4^2+6^2+\cdots+n^2$　(n は偶数)　　よって成立

Q 37　ケプラーのワイン樽の問題

直立した円柱の形をしたワイン樽について、その対角線の長さ（ℓ）が決まっているとき、容積を最大にするためにはどうしたらよいでしょう？　（微分をつかわないとすると？）



（略解）　$\ell^2 = h^2 + 4r^2$ より、　$r^2 = (\ell^2 - h^2)/4$



容積を V として、$V = \pi r^2 h = (\pi/4)\cdot\{-(h^3-\ell^2 h)\}$

$y = -(h^3-\ell^2 h)$　とおく。　V すなわち y が最大となるような h を求める。　$y = -(h^3-\ell^2 h)$ と $y = k$ (k 定数) とが接するようにすればよい。　$h^3 - \ell^2 h + k = 0$ が重根をもつから

$h^3 - \ell^2 h + k = (h + a)(h - b)^2 = h^3+(a-2b)h^2-(2ab-b^2)h+ab^2$

$\begin{cases} a - 2b = 0 \\ 2ab - b^2 = \ell^2 \end{cases}$　よって $h = b = \ell / \sqrt{3}$ とすればよい。

（参考）　$V = \pi\cdot\ell^3 / (6\sqrt{3})$　　（本では微分を利用。）

Q 44 と Q 45　ヤーコプ・ベルヌーイと無限級数（その１）

ヤーコプ・ベルヌーイは下の値を求めました。あなたはこれらの値を計算できますか？

Q 44　$\dfrac{1}{2} + \dfrac{2^2}{2^2} + \dfrac{3^2}{2^3} + \dfrac{4^2}{2^4} + \cdots$　　Q 45　$\dfrac{1}{2} + \dfrac{2^3}{2^2} + \dfrac{3^3}{2^3} + \dfrac{4^3}{2^4} + \cdots$

（その前に）

(A)　$S_0(n) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{2^4} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$

−)　$\dfrac{S_0(n)}{2} = \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{2^4} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{2^{n+1}}$

$\dfrac{S_0(n)}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^{n+1}}$　∴　$S_0(n) = 1 - \dfrac{1}{2^n} \to 1$　(= S_0 とする。)

(B)

$$S_1(n) = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \cdots + \frac{n}{2^n}$$

$$-)\quad \frac{S_1(n)}{2} = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \cdots + \frac{n-1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}}$$

$$\frac{S_1(n)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}}$$

$$S_1(n) = 2 - \frac{n+2}{2^n} \to 2 \quad (= S_1 \text{ とする。})$$

A 44

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{2^2}{2^2} + \frac{3^2}{2^3} + \frac{4^2}{2^4} + \cdots + \frac{n^2}{2^n} + \cdots$$

$$-)\quad \frac{S_2}{2} = \frac{1}{2^2} + \frac{2^2}{2^3} + \frac{3^2}{2^4} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{2^n} + \cdots \qquad \left(\begin{array}{l} n^2 - (n-1)^2 \\ = 2n-1 \end{array} \right)$$

$$\frac{S_2}{2} = \frac{2\cdot 1-1}{2} + \frac{2\cdot 2-1}{2^2} + \frac{2\cdot 3-1}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} + \cdots$$

$$\therefore S_2 = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \ldots\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \ldots\right)$$

$$= 4\cdot S_1 - 2\cdot S_0 = 8 - 2 = 6$$

A 45

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{2^3}{2^2} + \frac{3^3}{2^3} + \frac{4^3}{2^4} + \cdots + \frac{n^3}{2^n} + \cdots$$

$$-)\quad \frac{S_3}{2} = \frac{1}{2^2} + \frac{2^3}{2^3} + \frac{3^3}{2^4} + \cdots + \frac{(n-1)^3}{2^n} + \cdots \qquad \left(\begin{array}{l} n^3 - (n-1)^3 \\ = 3n^2 - 3n + 1 \end{array} \right)$$

$$\frac{S_3}{2} = \frac{3\cdot 1-3\cdot 1+1}{2} + \frac{3\cdot 2^2-3\cdot 2+1}{2} + \cdots + \frac{3\cdot n^2-3\cdot n+1}{2} + \cdots$$

$$\therefore S_3 = 6\left(\frac{1}{2} + \frac{2^2}{2^2} + \cdots + \frac{n^2}{2^n} + \ldots\right) - 6\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \ldots\right)$$

$$+ 2\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \ldots\right)$$

$$= 6\cdot S_2 - 6\cdot S_1 + 2\cdot S_0 = 36 - 12 + 2 = 26$$

Q 49　破産問題・一般解（その１）

　A と B の二人がいて、二人の所持金は、A が m 円、B が n 円です。この二人がゲームを一方が破産するまで永久に続けます。ゲームは公平でどちらの勝つ確率も 1/2 です。勝者が敗者から 1 円受け取ります。どちらかの所持金が無くなったら、対戦は終わりです。A と B とが対戦に勝つ確率の比は？

（略解　本を参考に）（過去に「数学散歩」でも扱ったように思いますが？）

B の所持金が k 円のとき、B が破産する確率を p_k とすると、

$p_0 = 1$、$p_{m+n} = 0$ で　$p_k = p_{k+1}\cdot(1/2) + p_{k-1}\cdot(1/2)$、　$p_{k+1} - p_k = p_k - p_{k-1}$

数列 $\{p_k\}$ は等差数列、　公差は $-\dfrac{1}{m+n}$、　$p_k = 1 - \dfrac{k}{m+n}$　（気になったこと？公差か項差？）

A が勝つ（B の所持金が n 円で B が破産する）確率は $p_n = 1 - \dfrac{n}{m+n} = \dfrac{m}{m+n}$

逆に、B が勝つ確率は $1 - p_n = \dfrac{n}{m+n}$

その比は　m ： n

Q 52　n 個から偶数個（基本問題）

　n 個の桃があります。その中から 2 個以上　n 個以下で偶数個を選びます。桃をそれぞれ区別した場合、何通りの選び方がある？

（略解）　$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \cdots + {}_nC_nx^n$　で 、x = 1、−1 として

$$2^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 \cdots + {}_nC_n \quad \cdots ①$$

$$0 = {}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 \cdots + (-1)^n{}_nC_n \quad \cdots ②$$

（① + ②）/2 、と ${}_nC_0 = 1$ より、${}_nC_2 + {}_nC_4 + {}_nC_6 + \cdots = 2^{n-1} - 1$

Q 54　黒く塗る（基本的な難問）

　横 1 列に並べて固定されている 9 つの白マスの幾つか（ 0 であってもよい）を黒く塗る。ただし、黒いマスが 2 つ以上隣り合ってはいけない。塗り方は幾通りありますか？

（略解）　（例　□■□□□■□□□）　n 個のマスの塗り方を a_n 通りとする。

最初のマスが □ のとき、残りの n−1 個のマスの塗り方は、a_{n-1} 通り。

最初のマスが ■ のとき、２番目は □ で、残りの n−2 個のマスの塗り方は、a_{n-2} 通り。

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$　（ﾌｨﾎﾞﾅｯﾁ数列になる。）　n=1 □、■ $a_1 = 2$　　n=2 □□、□■、■□ $a_2 = 3$

$a_3 = 3+2 = 5$、 $a_4 = 5+3 = 8$、　$a_5 = 8+5 = 13$、　$a_6 = 21$、　$a_7 = 34$、　$a_8 = 55$、　$a_9 =$ 89　（答）