数学散歩　ＸⅢ-7　　　　　　　　２０２０．９．　β　　岐阜市　村山錞司

一般の数学啓蒙書から---

「数学超絶難問 時代を超えて天才の頭脳に挑戦！ 小野田博一 日本実業出版社」 (3/3)

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜問題、解説など＞

第３部 ニュートンとオイラー

（解答は、私なりの解釈であり、いい加減なところもありますので、よろしく。）

Q 55　メルカトルの級数　　（Q 55 ～ Q 60 は級数関係の問）
$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$ この無限級数の和は？

（略解－本を参考に）

$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots$ とおく。

$f'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots = 1 / (1+x)$

$\{\ln(1+x)\}' = 1/(1+x)$ 、$f(0) = 0$ 、$\ln(1+0) = 0$ だから

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots = \ln(1+x)$$

$x = 1$ として、$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \ln 2$

（メルカトルの対数級数とよばれているとのこと）

Q 59　ライプニッツ・グレゴリー級数
$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$ この無限級数の和は？

（略解－Q 55 と同様）

$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots$ とおく。

$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots = 1 / (1+x^2)$

$(\arctan x)' = 1/(1+x^2)$ 、$f(0) = 0$ 、$\arctan 0 = 0$ だから

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots = \arctan x$$

$x = 1$ として、$\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ より $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi}{4}$

（1671年にジェイムズ・グレゴリーが、1674年にライプニッツが別々に発見・・・）

Q 60　まったくの遊びの謎解き（その１）
$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \cdots$ この奇妙で美しいこの無限級数の和は？

（略解－Q 55、Q59 にならって）

$f(x) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^8}{8} - \frac{x^{10}}{10} - \frac{x^{11}}{11} + \cdots$ とおく。

$f'(x) = 1 + x - x^3 - x^4 + x^6 + x^7 - x^9 - x^{10} + \cdots$

$= (1 + x) - x^3(1 + x) + x^6(1 + x) - x^9(1 + x) + \cdots$

$= (1 + x) / (1 + x^3) = 1 / (x^2 - x + 1)$

$$f(x) = \int \frac{dx}{x^2-x+1} = \cdots = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{ds}{s^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan s + c$$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c$ （c は積分定数）、求めるのは、$f(1)-f(0) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

Q 61　まったくの遊びの謎解き（その２）
$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + + \cdots$ Q 60 よりはるかにシンプルで美しい無限級数の値は？（答は Q 60 より、ちょっとだけ複雑です）

（略解）（抜き書き）
$f(x) = x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^{10}}{10} + \cdots$ とおく。

$f'(x) = 1 - x^3 + x^6 - x^9 + \cdots = 1 / (x^3 + 1) = 1 / \{(x+1)(x^2-x+1)\} = \cdots$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{6}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2-x+1}$$ （Q 60 を参考にして積分）

$$f(x) = \frac{1}{3}\cdot\ln(x+1) - \frac{1}{6}\cdot\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c$$

求めるのは、$f(1)-f(0) = \frac{1}{3}\cdot\ln 2 + \frac{\sqrt{3}\,\pi}{9}$

（参考 この後、数ページにわたって「連分数」（Brouncker の連分数など）を扱っています。関心のある方は原本にあたってください。ここでは割愛します。。なお、以前「数学散歩 V-9 2017.1.α」でも$\sqrt{a^2+b}$ の近似値について連分数を紹介しています。）

＜自然対数 e の関連事項など＞

微積の本（参考書、教科書）にはテイラー、マクローランの定理の例としてあり、ここでは問題と答（結論）などの概略を紹介します。

Q 67　ニュートンの指数級数

ニュートンは e を無限級数で表しただけではなく、e^x も無限級数で表しました(1665 年）。

e^x を無限級数で表してみましょう。

Q 70　ニュートンの正弦級数と余弦級数

sin x を無限級数で表してみましょう。

（本から－なお、sin x を最初に無限級数で表したのはニュートンです。）

Q 74　オイラーの恒等式　$e^{i\pi} = -1$ を導きましょう。

Q 75　驚愕の値、i^i の値は？

（略解－まとめて）

$$e^x = \lim_{n\to\infty} [\{1+(x/n)\}^{(n/x)}]^x = \lim_{n\to\infty} \{1+(x/n)\}^n$$

$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad \text{(A 67)}$$

次に、本ではいろいろやりくりしていますが、ここではまとめて上式で x を ix として、

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(\underline{\underline{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots}}\right)$$

$$= \cos x + i\,\underline{\sin x} \qquad \text{(A 70)}$$

$$e^{i\pi} = \cos\pi = -1 \qquad \text{(A 74)}$$

$e^{ix} = \cos x + i\sin x = i$　として　$x = (4n+1)\pi/2$　（n は整数）

$i = e^{i(4n+1)\pi/2}$　から　$i^i = (e^{i(4n+1)\pi/2})^i = e^{-(4n+1)\pi/2} = 1/e^{(4n+1)\pi/2}$　(A 75)

（本から ： 値は実数です。しかも、その値は無限個あるのです。）

Q 76　バーゼル問題

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$ この無限級数の値は？（28 歳のオイラー(1735 年））

Q 77　ウォリスの等式

$$\frac{1\cdot3}{2\cdot2}\cdot\frac{3\cdot5}{4\cdot4}\cdot\frac{5\cdot7}{6\cdot6}\cdot\frac{7\cdot9}{8\cdot8}\cdot\cdots = \frac{2}{\pi}$$ あなたは導けますか？

(A 76)　A 70 から、$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$　…①

(=) 0　となる解は
$x = \pm\pi、\pm2\pi、\cdots$　$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(3\pi)^2}\right)\cdots$　…②

①と②の展開における $\underline{x^2\text{ の係数}}$を比較して、

$$-\frac{1}{6} = -\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} + \cdots\right)、\quad \therefore\quad \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

(A 77)　②に $x = \pi/2$ を代入して、

$$\frac{2}{\pi} = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)\left(1 - \frac{1}{36}\right)\cdots$$

$$= \frac{1\cdot3}{2\cdot2}\cdot\frac{3\cdot5}{4\cdot4}\cdot\frac{5\cdot7}{6\cdot6}\cdot\frac{?}{?}\cdot\cdots$$ ？ のところに確認して入れてください。