数学散歩　XⅣ-3　　　　　　　　２０２０．１１．α　　岐阜市　村山錞司

「ﾓﾉｸﾞﾗﾌ新書12 演習 外国の問題（Ⅰ）（関数と写像と変換） 江原誠 秋山元 科学新興社」

昔、購入したｼﾘｰｽﾞ５冊の最初の本です。（まえがきから）・・・主として、ﾌﾗﾝｽのﾊﾞｶﾛﾚｱの問題・・・などから・・・とあり、楽しめそうな問題などを拾って紹介します。解は本を参考に私なりにまとめてみました。ｶﾝﾁｶﾞｲがあるかも。問題文は都合により手を加えたものもあります。(問題は、演習１～４１と、各演習に続く Traininng １～２５ からなっています。)

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜問題、略解、解説など＞

Training 1　N を負でない整数の集合、Z を整数の集合とする。N から Z への写像 f を次のように定義する。 $x \to f(x) = \begin{cases} x/2 & (x\text{ が偶数のとき}) \\ -(x+1)/2 & (x\text{ が奇数のとき}) \end{cases}$ このとき、次の問に答えよ。

⑴　写像 f は上への１対１の写像であることを示せ。

⑵　$n \in N$ のとき $S = f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$ の値を求めよ。

(略解) ⑴　$N = \{ 0, 1, 2, 3, \cdots, 2m, 2m+1, \cdots \}$　0 以上のすべての整数

条件より $f(2m) = m$ 、$f(2m+1) = -(m+1)$ ($m = 0, 1, 2, 3, \cdots$)

$f(x) = y$ (整数) とすると、$y \geqq 0$ のとき $x = 2y$ 、$y \leqq -1$ のとき $x = -(2y+1)$

すべての整数 y に対して x はただ１つ定まり、f は上への１対１の写像である。

⑵ $n = 2m$ （偶数）のとき

$S = f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(2m) = 0 - 1 + 1 - 2 + 2 + \cdots - m + m = \underline{0}$

$n = 2m+1$ （奇数）のとき

$S = \underline{f(0) + \cdots + f(2m)} + f(2m+1) = \underline{0} - (m+1) = -(m+1) = \underline{-(n+1)/2}$

演習２　座標平面上で $f : \begin{cases} X = x + y \\ Y = xy \end{cases}$

という変換 f によって、点 (x,y) を点 (X,Y) にうつすとき、次の問に答えよ。

⑴　この変換は上への変換でもないし、１対１の変換でもないことを示せ。

⑵　直線 $y = 0$、直線 $x = 0$ はこの変換によって、どのような直線にうつるか。

⑶　直線 $Y = 0$、直線 $X = 0$ にうつされるような図形を求めよ。

(略解) ⑴　x、y を２根とする２次方程式は $t^2 - Xt + Y =0$ で、判別式 $D = X^2 - 4Y \geqq 0$ より、$Y \leqq X^2 / 4$　全平面でないから、上への変換ではない。また、$x \neq y$ に対して異なる２点 (x,y)、(y,x) が同じ点 (X,Y) にうつり、１対１ではない。

⑵　$y = 0$ は $X = x$、$Y = 0$ より直線 $Y = 0$ にうつり、$x = 0$ は $X = y$、$Y = 0$ で同じく直線 $Y = 0$ にうつる。

⑶　$Y = 0$ として $xy = 0$ より $x = 0$ と $y = 0$ で y 軸と x 軸上の点が $Y = 0$ にうつる。

$X = 0$ として $y = -x$ 、$Y = -x^2 \leqq 0$ 、直線 $y = -x$ 上の点が半直線 $X = 0$ $(Y \leqq 0)$ にうつる。

Training 2　座標平面上で

$\begin{cases} X = x + y \\ Y = (x - y)y \end{cases}$ という変換によって、点 (x,y) を点 (X,Y) にうつすとき、点 (x,y) が座標平面全体を動くときと、直線 $ax + by = c$ (ただし $a^2 + b^2 \neq 0$) 上を動くときについて、点 (X,Y) がどんな図形をえがくか調べよ。

(略解)　$X = x + y$ より $x = X - y$ 、$Y = (x - y)y$ に代入して整理すると、$(Y = (X - 2y)y)$

$2y^2 - Xy + Y = 0$ 、 y は実数だから判別式 $D = X^2 - 8Y \geqq 0$ より、点 (x,y) が座標平面全体を動くとき、点 (X,Y) は $y \leqq x^2 / 8$　・・・①　をえがく。

(参考　$X^2 - 8Y = (x + y)^2 - 8(x-y)y = 9y^2 - 6xy + x^2 = (3y - x)^2 \geqq 0$)

次に、$ax + by = c$ ・・・②　について、条件より $x + y = X$ ・・・③

② － ③× b より、$(a - b)x = c - bX$

(ｱ)　$a = b$ $(\neq 0)$ のとき、　$X = c / b$　(①より、　$Y \leqq c^2 / (8b^2)$)

(ｲ)　$a \neq b$ のとき、$x = (c - bX)/(a - b)$ 、$y = X - x = (aX - c)/(a - b)$ 、

$x - y = -\{(a + b)X -2c\}/(a - b)$ より、

$$Y = -\frac{\{(a + b)X -2c\}(ax - c)}{(a - b)^2} = \underline{-\frac{a(a + b)X^2}{(a - b)^2} + \frac{c(3a + b)X}{(a - b)^2} - \frac{2c^2}{(a - b)^2}}$$

(①の $Y \leqq \dfrac{X^2}{8}$ をみたす。(証略))

Training ３　⑴　$A = \{-1,0,1\}$ 、$B = \{-2,-1,0,1,2,3\}$ とするとき、A から B への１対１の写像 f のうちで、A の任意の要素 x に対して、$f(x) + f(-x) = 2$ となるような f を定めよ。⑵ 略

(略解) ⑴　B の要素で２つ加えて 2 になるのは、$-1+3$、$0+2$、$1+1$、$2+0$、$3+(-1)$、まず、$f(0) = 1$
f は１対１だから写像 f は、　$(f(-1),f(0),f(1)) = (-1,1,3)$、$(0,1,2)$、$(2,1,0)$、$(3,1,-1)$

Training ６　⑴　R を実数の集合とし、R×R から R×R への写像 f を $x' = x$、$y' = xy - y^3$ で定義すると、f は上への写像となることを示せ。

⑵　⑴と同様、$x' = x + y$ 、$y' = x^2 + xy + y^2$ で定義するとき、f の値域を求めよ。

(略解) ⑴　任意の x' 、y' に対応する実数 x、y が存在すればよい。 x については $x = x'$。
y については、$y' = T$ として、$T = -y^3 + xy$ は y についての３次関数だから値域 T は $-\infty < T < \infty$ のすべての値を取り得る。f は上への写像になる。

⑵　$x' = x + y$ より $y = x' - x$ を $y' = x^2 + xy + y^2$ に代入すれば、
$(x' - x)^2 + x(x' - x) + x^2 - y' = 0$ より　$x^2 - x'x + x'^2 - y' = 0$
x は実数だから判別式をとって、　$D = x'^2 - 4(x'^2 - y') = 4y' - 3x'^2 \geqq 0$

よって求める値域は　　$y \geqq \dfrac{3}{4}x^2$

演習１０　実数の 集合を R とし、R から R への関数の集合を F とする。いま、F の要素 f 、g に対して演算 f＋g 、f×g 、f∘g を次のように定義する。

$f+g \ : \ x \to (f+g)(x) = f(x)+g(x)$
$f\times g \ : \ x \to (f\times g)(x) = f(x)\times g(x)$
$f\circ g \ : \ x \to (f\circ g)(x) = f\{g(x)\}$

このとき、F の任意の要素 f、g、h に対して次の各々の式が成り立つときは証明し、成り立たないときは反例をあげよ。

⑴　$(f\times g)\circ h = (f\circ h)\times(g\circ h)$　　⑶　$(f+g)\circ h = (f\circ h)+(g\circ h)$
⑵　$f\circ(g\times h) = (f\circ g)\times(f\circ h)$　　⑷　$f\circ(g+h) = (f\circ g)+(f\circ h)$

(略解) ⑴　$\{(f\times g)\circ h\}(x) = (f\times g)\{h(x)\} = f\{h(x)\}\times\{g(h(x)\} = \{(f\circ h)(x)\}\times\{(g\circ h)(x)\}$
$= \{(f\circ h)\times(g\circ h)\}(x)$　　よって成立

⑵ (反例)　$f(x) = x+1$ 、$g(x) = x^2$ 、$h(x) = x$ とすると
$\{f\circ(g\times h)\}(x) = f\{(g\times h)(x)\} = f\{g(x)\times h(x)\} = f(x^2\times x) = f(x^3) = x^3 + 1$
$\{(f\circ g)\times(f\circ h)\}(x) = \{(f\circ g)(x)\}\times\{(f\circ h)(x)\} = f\{(g(x)\}\times f\{h)(x)\}$
$= f(x^2)\times f(x) = (x^2 + 1)(x + 1) = x^3 + x^2 + x + 1$　　よって成立せず。

⑶　$\{(f+g)\circ h\}(x) = (f+g)\{h(x)\} = f\{h(x)\}+\{g(h(x)\} = \{(f\circ h)(x)\}+\{(g\circ h)(x)\}$
$= \{(f\circ h)+(g\circ h)\}(x)$　　よって成立

⑷ (反例)　$f(x) = x+1$ 、$g(x) = x^2$ 、$h(x) = x$ とすると
$\{f\circ(g+h)\}(x) = f\{(g+h)(x)\} = f\{g(x)+h(x)\} = f(x^2 + x) = x^2 + x + 1$
$\{(f\circ g)+(f\circ h)\}(x) = \{(f\circ g)(x)\}+\{(f\circ h)(x)\} = f\{(g(x)\}+f\{h)(x)\}$
$= f(x^2)+f(x) = (x^2 + 1) + (x + 1) = x^2 + x + 2$　　よって成立せず。

Training １０　⑴　$y = x + 4/x^2$ の極値を求めグラフをかけ。

⑵　$y = x + (4a^3)/(x^2)$ $(a>0)$ は $y = x + 4/(x^3)$ と相似であることを示し、相似の中心と相似比を求めよ。次にこのことを使って、$y = x + (4a^3)/(x^2)$ の極値をとる点は a が変化すると、どのような図形をえがくか。

(略解) ⑴　　$y = x + 4/x^2$・・・①　は　　$x = 2$ のとき極小値 3　(グラフは略)

⑵　$y = x + (4a^3)/(x^2)$ ・・・②　は、$x = 2a$ のとき　極小値 $3a$ をとる。
①、②の極値をとる点は、$(2,3)$ と $(2a,3a)$ $(a>0)$ である。
①上の点 $P(x,y)$、原点 O を中心にして距離を a 倍した点を $Q(X,Y)$ とすると、
$X = ax$ 、$Y = ay$ すなわち $x = X/a$ 、$y = Y/a$ ①に代入して
$(Y/a) = (X/a) + 4/\{(X/a)^2\}$ すなわち $Y = X + (4a^3)/(X^2)$　点 $Q(X,Y)$ は②上にある。
よって、①、②は相似で、相似の中心は原点 O 相似比は 1 : a となる。
次に②の極値をとる点は、$(2a,3a)$ より、直線 $y = (3/2)x$ をえがく。原点 O を除く。

Training １４　座標平面上で

$\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = 4x + 2 \end{cases}$ なる変換 f によって、点 $M(x,y)$ を点 $M'(x',y')$ にうつすとき、次の問に答えよ。

⑴　変換 f は上への１対１の変換であることを示し、この変換によって変わらない点を求めよ。

⑵　この変換によって、全体として変わらない直線を求めよ。

(略解) ⑴　　f を逆にみて　$\begin{cases} y = x' - 1 \\ x = (y' - 2)/4 \end{cases}$　任意の点 $M'(x',y')$ を与えれば１つの点 $M(x,y)$ が定まり、上への１対１の変換である。

次に、$x = x'$、$y = y'$ として、$x = y + 1$、$y = 4x + 2$ から、$(x, y) = (-1, -2)$

⑵　求める(変わらない) 直線を、$ax + by + c = 0$ ($a^2 + b^2 \neq 0$) とすると、
$ax' + by' + c = 0$ $\therefore$ $a(y + 1) + b(4x + 2) + c = 0$ で、$4bx + ay + a + 2b + c = 0$
比例定数を k として、$4b = ak$、$a = bk$、$a + 2b + c = ck$ だから、
よって、$4b = bk^2$ 、 $b = 0$ とすると $a = 0$ で不可。$b \neq 0$ より、$k = \pm 2$
$k = 2$ のとき、$a = 2b$、$c = 4b$ で $2x + y + 4 = 0$
$k = -2$ のとき、$a = -2b$ 、$c = 0$ で $y = 2x$ 直線は、$2x + y + 4 = 0$ と $y = 2x$ の２本

演習３１　Q を有理数の集合とする。Q から Q への写像φは Q の要素 x、y に対して

$$\begin{cases} \phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y) & \cdots ① \\ \phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y) & \cdots ② \\ \phi(1) \neq 0 & \cdots ③ \end{cases}$$

の条件をみたしている。次の問に答えよ。

⑴　次の(ⅰ)、(ⅱ) を証明せよ。
(ⅰ)　$\phi(-x) = -\phi(x)$　　(ⅱ)　$x \neq 0$ のとき、$\phi(x) \cdot \phi(1/x) = 1$

⑵　n を整数とするとき、$\phi(n)$ の値を求めよ。次に x が有理数のとき、$\phi(x)$ の値はどうなるか。

⑶　以上のことから、この写像φはどのような写像であるか。

(略解) ⑴ (ⅰ) $x = 0$ として $\phi(0) = \phi(0) + \phi(0)$ より $\phi(0) = 0$ 、
$\phi(x) + \phi(-x) = \phi\{x + (-x)\} = \phi(0) = 0$ $\therefore$ $\phi(-x) = -\phi(x)$
(ⅱ) $\phi(1 \cdot 1) = \phi(1) \cdot \phi(1)$ 、$\phi(1) \neq 0$ より $\phi(1) = 1$
$\phi(x) \cdot \phi(1/x) = \phi\{x \cdot (1/x)\} = \phi(1) = 1$ $\therefore$ $\phi(x) \cdot \phi(1/x) = 1$

⑵　⑴より、$\phi(0) = 0$ 、$\phi(1) = 1$ 、0 以上の整数 k について $\phi(k) = k$ とすると、
$\phi(k+1) = \phi(k) + \phi(1) = k + 1$ だから数学的帰納法により、$n \geqq 0$ のとき $\phi(n) = n$
また、$\phi(-n) = -\phi(n) = -n$ だから　整数 n について $\phi(n) = n$
⑴(ⅱ) より、p ($\neq 0$)、q を整数とするとき $\phi(p) = p$ 、$\phi(q) = q$ だから、
$1 = \phi(p) \cdot \phi(1/p)$ より $\phi(1/p) = 1/\phi(p)$ 、$\phi(q/p) = \cdots = q/p$
よって x が有理数のとき、$\phi(x) = x$

⑶　写像φは有理数において恒等写像

Training ２０　R を実数の集合とし、R×R から R への関数 $f(x, y)$ がすべての実数 x、y、u、v について

$$\begin{cases} f(x+u, y+u) = u + f(x, y) \\ f(xv, yv) = v \cdot f(x, y) \end{cases}$$

の条件をみたしているとき、次を示せ。

⑴　$z = f(x, y)$ は $(1-c)x + cy$ の形でなければならない。ただし、$c = f(0, 1)$

⑵　逆に、⑴で求めた $f(x, y)$ は与えられた条件をみたす。

(略証) ⑴　$f(x, y) = f(0+\underline{x}, -x+y+\underline{x}) = \underline{x} + f(0, \underline{\underline{-x+y}}) = x + (\underline{\underline{-x+y}}) \cdot f(0, 1)$
$= x + c(-x+y) = (1-c)x + cy$

⑵　$f(x, y) = (1-c)x + cy$ とすると、
$f(x+u, y+u) = (1-c)(x+u) + c(y+u) = u + (1-c)x + cy = u + f(x, y)$
$f(xv, yv) = (1-c)xv + c \cdot yv = v \cdot \{(1-c)x + cy\} = v \cdot f(x, y)$
$f(x, y)$ は条件をみたす。