数学散歩　XⅣ-4　　　　　　　　２０２０．１１．β　　岐阜市　村山錞司

「ﾓﾉｸﾞﾗﾌ新書16 演習 外国の問題（Ⅱ）（微分と積分） 江原誠 秋山元 科学新興社」

ｼﾘｰｽﾞ ２冊目/５冊です。（まえがきから）・・・ﾌﾗﾝｽのﾊﾞｶﾛﾚｱ大学入学資格試験）の問題を中心に、数Ⅲの微積分に関する問題をまとめたものです。・・・（以下、前回と同様）

（問題は、演習１～３８と、各演習に続く Traininng １～２３ からなっています。）

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜問題、略解、解説など＞

演習１(1)　$y = x^2e^x$ のとき、第 n 次導関数を $y^{(n)}$ で表すと $y^{(n)} = e^x(x^2 + a_nx + b_n)$ という形にかけることを示し、次に a_n 、b_n を求めよ。

(2)　$P_0(x) = 1$ 、 $P_n(x) = \dfrac{x(x-n)^{n-1}}{n!}$ (n=1,2,3,…) とおく。$P_n(x)$ の第 k 次導関数を $P_n^{(k)}(x)$ で表すと、n≧k である任意の n に対して $P_n^{(k)}(x) = P_{n-k}(x-k)$ であることを示せ。

（略解）(1)

$$\left.\begin{array}{l} y' = e^x(x^2 + 2x)\ 、\ a_1 = 2\ 、b_1 = 0 \\ y'' = e^x(x^2 + 4x + 2)\ 、\ a_2 = 4\ 、b_2 = 2 \end{array}\right\}\ ・・・①$$

$y^{(k)}(x) = e^x(x^2 + a_kx + b_k)$ として微分すると、

$y^{(k+1)}(x) = e^x\{x^2 + (a_k+2)x + (a_k+b_k)\} = e^x(x^2 + a_{k+1}x + b_{k+1})$ とできる。

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{k+1} = a_k + 2 & ・・・② \\ b_{k+1} = a_k + b_k & ・・・③ \end{array}\right.$$

①、②、③から、a_n 、b_n が定まる。

a_n は初項 2 、公差 2 の等差数列だから $\underline{a_n = 2n}$

③より、数列 $\{b_n\}$ の階差数列が $\{a_n\}$ だから、

$\underline{b_n} = b_1+(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+ \cdots + (b_n-b_{n-1}) = 2+4+\cdots+2(n-1)\ \underline{= n(n-1)}$

(2)　x = (x−n)+n だから

$$\boxed{P_n(x)} = \frac{\underline{x}(x-n)^{n-1}}{n!} = \frac{(x-n)^n}{n!} + \frac{\underline{n}(x-n)^{n-1}}{n!} = \boxed{\frac{(x-n)^n}{n!} + \frac{(x-n)^{n-1}}{(n-1)!}}$$

微分すると

$$P_n'(x) = \frac{(x-n)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(x-n)^{n-2}}{(n-2)!} = \frac{(x-n+n-1)(x-n)^{n-2}}{(n-1)!} = \frac{(x-1)(x-n)^{n-2}}{(n-1)!}$$

$$= \frac{(x-1)(x-n)^{n-2}}{(n-1)!} = P_{n-1}(x-1)$$　微分を続ける・・・

第 k 次導関数は

$$P_n^{(k)}(x) = \frac{(x-n)^{n-k}}{(n-k)!} + \frac{(x-n)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} = \frac{(x-k)(x-n)^{n-k-1}}{(n-k)!} = P_{n-k}(x-k)$$

（参考　本の解答は、分数式を分けないで、そのまま微分し、数学的帰納法で対応。）

Training ４　２つの曲線 $y = x^m$ (m≠0) 、$y = \log_a x$ (a＞0 、a≠1) が接する条件を求めよ。また、接点はどのような図形をえがくか。

（略解）　接点を (X,Y) とする。$Y = X^m = \log_a X = \log X/\log a$ より、$\log a = \log X / X^m$ …①

接線の傾きが同じになるから、 $mX^{m-1} = 1/(X \log a)$ より、$\log a = 1 / mX^m$ …②

①、②より　$m \log X = 1$ だから $X^m = e$ 、　接する条件は②より、$m \log a = 1 / e$

次に、$X = e^{1/m}$ より、X＞0 、X ≠ 1 ($y = e^{1/x}$ のグラフから)

$Y = X^m = e$ だから接点は、直線 y = e (x ＞ 0 、x ≠ 1) をえがく。

Training ９　$y = \dfrac{\sin 3x}{\cos^3 x}$ ($|x| < \dfrac{\pi}{2}$) のとき、次の問に答えよ。

(1)　変化の状態を調べ、グラフをかけ。

(2)　この関数のグラフと x 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ。

（略解）(1)　$\dfrac{\sin 3(-x)}{\cos^3(-x)} = -\dfrac{\sin 3x}{\cos^3 x} = -y$　グラフは原点対称。$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ で調べる。

$$y' = \frac{3\cos 3x\cdot\cos^3 x - \sin 3x\cdot 3\cos^2 x\cdot(-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{3(\cos 3x\cdot\cos x + \sin 3x\cdot\sin x)}{\cos^4 x}$$

$$= \frac{3(\cos 3x\cdot\cos x + \sin 3x\cdot\sin x)}{\cos^6 x} = \frac{3\cos 2x}{\cos^4 x}$$

y = 0 として、x = 0 、π/3

y'= 0 として、x = π/4

０～π/2 の増減表

x	0	…	π/4	…	π/3	…	π/2
y'	3	+	0	−		−	
y	0	↗	2	↘	0	↘	−∞

（グラフは略）

(cos x = t 、-sin x dx = dt)

(2)

$$S = 2\int_0^{\pi/3} \frac{\sin 3x}{\cos^3 x}dx = 2\int_0^{\pi/3} \frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{\cos^3 x}dx = \cdots$$

$$= 2\int_{1}^{1/2} \frac{(1-4t^2)}{t^3}\,dt = \int_{1}^{1/2}\left(\frac{2}{t^2}-\frac{8}{t}\right)dx = \cdots = 8\log 2 - 3$$

Training １３　a を実数の定数とし、$f_a(x) = e^{2x} - a(2x-1)$ とする。
⑴　$f_a(x)$ が極小値をもつとき、その点の座標 (X,Y) を a で表せ。
⑵　a が変化するとき、点 (X,Y) のえがくグラフをかけ。

（略解）⑴　$f_a{}'(x) = 2e^{2x} - 2a = 2(e^{2x} - a) = 0$ 。　$a \leqq 0$ とすると $f_a{}'(x) > 0$ 、
$f_a(x)$ は単調増加になって不可」 。$f_a(x)$ は極小値をもつから $a > 0$
$e^{2X} = a$ ∴ $2X = \log a$ 、$X = \log\sqrt{a}$ 、$Y = a - a(\log a - 1) = 2a - a\log a$
よって求める座標は、$(\log\sqrt{a}\ ,\ 2a - a\log a)$

⑵　⑴より、$a = e^{2X}$ 、　$Y = 2e^{2X} - e^{2X}\cdot 2X = 2\cdot e^{2X}(1-X)$ 、　$Y' = 2e^{2X}(1-2X)$
$Y = 0$ 、$X = 1$
$Y' = 0$ 、$X = 1/2$
$X\to-\infty$ のとき $Y\to 0$ 、x 軸は漸近線

増減表は

x	$-\infty$	…	1/2	…	∞
y'		+	0	−	
y	0	↗	e	↘	$-\infty$

グラフは略

Training １６　実数の関数 F(x) を　$F(X) = \int_0^{\pi} e^{-tx}\,dt$　で定義する。
F(X) は x = 0 で連続であることを示せ。

（略解）　$F(0) = \int_0^{\pi} dt = [x]_0^{\pi} = \pi$、　$x \neq 0$ とすると　$F(x) = \left[-(1/x)e^{-tx}\right]_0^{\pi}$

$$= -\frac{e^{-\pi x}-1}{x} = \frac{e^{\pi x}-1}{xe^{\pi x}} = \frac{e^{\pi x}-1}{\pi x}\cdot\frac{\pi}{e^{\pi x}} \xrightarrow[(x\to 0)]{} 1\cdot\pi = \pi$$

よって F(x) は x = 0 で連続

演習３７　x、y、z は t の関数で、次の連立方程式を満足し、t = 0 のとき、x = 0、y = −1、z = 4 となるという。x 、y 、z を求めよ。

$$\frac{dx}{dt} = y + z - 2x \quad \cdots ①$$
$$\frac{dy}{dt} = z + x - 2y \quad \cdots ②$$
$$\frac{dz}{dt} = x + y - 2z \quad \cdots ③$$

（略解）① + ② + ③より、$\dfrac{d(x+y+z)}{dt} = 0$　だから、
$x + y + z = a$（定数）　t = 0 のとき、
$a = 0 - 1 + 4 = 3$ 、　$x+y+z = 3$ より $y+z = 3-x$
$\dfrac{dx}{dt} = -3(x-1)$、$\dfrac{dy}{dt} = -3(y-1)$、$\dfrac{dz}{dt} = -3(z-1)$

$\dfrac{dt}{dx} = -\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{x-1}$ 、　$t = -\dfrac{1}{3}\log|x-1| + c$ 、　$\log|x-1| = -3(t-c)$
∴　$|x-1| = e^{-3(t-c)}$ 、　t = 0 のとき、x = 0　だから、$e^{3c} = 1$ 、$x = 1 - e^{-3t}$
同様に、　t = 0 のとき、y = −1 だから、$e^{3c} = 2$ 、$y = 1 - 2e^{-3t}$
t = 0 のとき、z = 4　だから、$e^{3c} = 3$ 、$z = 1 + 3e^{-3t}$

Training ２２　⑴ R を実数の集合とする。関数 f(x) は R で微分可能でその導関数 f'(x) は R で連続であるとする。関数 g(x) を g(x) = f(x) + f'(x) によって定めるとき次を示せ。

$$f(x) = e^{-x}\left(\int_a^{x} e^t g(t)\,dt + e^a f(a)\right)$$　（ a は定数 ）　　（⑵は略）

（略解）⑴　$(e^x F(x))' = e^x F(x) + e^x F'(x)$　∴　$e^x F(x) = (e^x F(x))' - e^x F'(x)$
より部分積分で　$\int e^x F(x)\,dx = e^x F(x) - \int e^x F'(x)\,dx$

$$\int_a^{x} e^t g(t)\,dt = \int_a^{x} e^t f(t)\,dt + \int_a^{x} e^t f'(t)\,dt$$
$$= \left[e^t f(t)\right]_a^{x} - \cancel{\int_a^{x} e^t f'(t)\,dt}\ \ \cancel{\int_a^{x} e^t f'(t)\,dt}$$
$$= e^x f(x) - e^a f(a)$$

$$\int_a^{x} e^t g(t)\,dt + e^a f(a) = e^x f(x)$$

$$\therefore\quad e^{-x}\cdot\left(\int_a^{x} e^t g(t)\,dt + e^a f(a)\right) = e^{-x}\cdot e^x f(x) = f(x)$$