数学散歩　ＸⅣ-5　　　　　　　　　２０２０．１２．α　　岐阜市　村山錞司

「ﾓﾉｸﾞﾗﾌ新書18 演習 外国の問題（Ⅲ）（行列と１次変換）　江原誠 科学新興社」

ｼﾘｰｽﾞ ３冊目/５冊です。 私の好みでつまみ食いして紹介します。本の解法と異なるものもあります。点検をよろしく。

(問題は、演習１～３７と、各演習に続く Traininng １～２１ からなっています。)

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜問題、略解、解説など＞

Training 4　2×2 行列全体の集合を S とし、S の任意の要素 A、B に対して、新しい演算 ∘ を $A\circ B = AB - BA$ で定義する。次の問に答えよ。

⑴　S の要素 A、B、C に対して $A\circ(B\circ C) = (A\circ B)\circ C - (A\circ C)\circ B$ が成り立つことを示せ。

⑵　⑴ の結果を使って、 $A\circ(B\circ C) + B\circ(C\circ A) + C\circ(A\circ B) = 0$ であることを示せ。ただし、0 は零行列を表す。

⑶　⑴ の結果を使って、演算 ∘ についての結合法則が成り立つかどうかを調べよ。

⑷　演算 ∘ についての単位元は存在しないことを示せ。

(略解) ⑴

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \{(AB - BA)C - C(AB - BA)\} - \{(AC - CA)B - B(AC - CA)\}\\
&= (ABC - \cancel{BAC}) - (\cancel{CAB} - CBA) - (ACB - \cancel{CAB}) + (\cancel{BAC} - BCA)\\
&= A(BC - CB) - (BC - CB)A = A(B\circ C) - (B\circ C)A = A\circ(B\circ C) = (\text{左辺})\quad \text{成立}
\end{aligned}
$$

⑵　$X\circ Y = XY - YX = -(YX - XY) = -Y\circ X$ を利用

⑴より

$$
\left.\begin{aligned}
A\circ(B\circ C) &= (A\circ B)\circ C - (A\circ C)\circ B\\
B\circ(C\circ A) &= -(C\circ A)\circ B = (A\circ C)\circ B\\
C\circ(A\circ B) &= -(A\circ B)\circ C
\end{aligned}\right\}\quad \therefore\ A\circ(B\circ C) + B\circ(C\circ A) + C\circ(A\circ B) = 0
$$

⑶　結合法則 $A\circ(B\circ C) = (A\circ B)\circ C$ がいつも成り立つとすると、

⑴の結果より、$(A\circ C)\circ B = 0$ が成り立たなければならない。

(反例)　$A = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ 、 $B = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ 、 $C = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ とすれば、

$(A\circ C)\circ B = \cdots = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \neq C$ で成立しない。　(点検をよろしく。)

⑷　単位元が存在するとして F とすると、任意の A に対して $A\circ F = A$ だから $F\circ F = F$

ところが $F\circ F = FF - FF = 0 \neq F$ だから単位元は存在しない。

Training 8　$M = \begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ のとき、M^n を求めよ。ただし、n は自然数とする。

(略解)　$M^2 = \begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\underline{5}&4\\4&5\end{pmatrix}$ 、　$M^3 = \begin{pmatrix}5&4\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\underline{14}&13\\13&14\end{pmatrix}$ 、

$M^4 = \begin{pmatrix}14&13\\13&14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\underline{41}&40\\40&41\end{pmatrix}$ 、　$M^5 = \begin{pmatrix}41&40\\40&41\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\underline{122}&121\\121&122\end{pmatrix}$ 、

・・・

(本では、 $M = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$

$M^n = (E+A)^n$ として進めている。)

	①	②	③	④	⑤	・・・
	2	5	14	41	122	・・・
	∨	∨	∨	∨		∨
(第１階差)	3	9	27	81	・・・	3^{k-1}

M^k の左上の数 2、5、14、…は、 $1+(1+3+9+\cdots+3^{k-1}) = 1+\{(3^k-1)/(3-1)\} = (3^k+1)/2$

よって　$M^k = \begin{bmatrix}\dfrac{3^k+1}{2}&\dfrac{3^k-1}{2}\\[2mm]\dfrac{3^k-1}{2}&\dfrac{3^k+1}{2}\end{bmatrix}$ と仮定すると

$$
M^{k+1} = \begin{bmatrix}\dfrac{3^k+1}{2}&\dfrac{3^k-1}{2}\\[2mm]\dfrac{3^k-1}{2}&\dfrac{3^k+1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dfrac{3^{k+1}+1}{2}&\dfrac{3^{k+1}-1}{2}\\[2mm]\dfrac{3^{k+1}-1}{2}&\dfrac{3^{k+1}+1}{2}\end{bmatrix}
$$

よって数学的帰納法より、 $M^n = \begin{bmatrix}\dfrac{3^n+1}{2}&\dfrac{3^n-1}{2}\\[2mm]\dfrac{3^n-1}{2}&\dfrac{3^n+1}{2}\end{bmatrix}$ となる。

Training　１７　座標平面上の１次変換　f ： $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 、 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

(a、b、c、d は実数) において、行列 A が $A \neq E$、$A \neq -E$、$A^2 = E$ (E は単位行列) ・・・①
という関係を満足するとき、次の問に答えよ。

⑴　行列 A が①という関係をみたす条件は $d = -a$、$a^2 + bc = 1$ であることを示せ。

⑵　変換 f によって直線は直線にうつることを示せ。

⑶　原点を通る直線の中で変換 f によって全体として不変な直線を求めよ。

(略解) ⑴　$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & d^2+bc \end{pmatrix} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

よって、　$a^2+bc = d^2+bc = 1$、 $b(a+d) = c(a+d) = 0$ 、 $a+d \neq 0$ とすると $b = c = 0$ 、
$a^2 = d^2 = 1$、 $a+d \neq 0$ だから $a = d = \pm 1$ となって $A = E$ か $A = -E$ で不可。
だから、　$d = -a$ 、 $a^2+bc = 1$　　逆にこのとき、①をみたす。

⑵　$A^2 = E$ より $A = A^{-1}$

f ： $\begin{cases} x' = ax+by \\ y' = cx-ay \end{cases}$　　f^{-1} ： $\begin{cases} x = ax'+by' = a(ax+by)+b(cx-ay) = (a^2+bc)x = x \\ y = cx'-ay' = c(ax+by)-a(cx-ay) = (a^2+bc)y = y \end{cases}$

直線を $Ax + By = C$ (A、B は同時に 0 にならない $A^2+B^2 \neq 0$) ・・・②　とすると、
うつった先は、$A(ax'+by')+B(cx'-ay') = C$ で、$(Aa+Bc)x'+(Ab-Ba)y' = C$ ・・・③
③で、$Aa+Bc = 0$、$Ab-Ba = 0$ が同時に成り立つとすると、
$(Aa+Bc)a + (Ab-Ba)c = A(a^2+bc) = A = 0$
$(Aa+Bc)b - (Ab-Ba)a = B(a^2+bc) = B = 0$　　　$A = B = 0$ となり不可
　よって、③は直線になる。

⑶　原点を通る直線は $y = mx$ (m は実定数) か、$x = 0$

(ｱ)　$y = mx$ のとき、変換後も $y' = mx'$ だから、$cx-ay = m(ax+by)$ 、
$y = mx$ から $(c-am)x = m(a+bm)x$ 、$(bm^2+2am-c)x = 0$
　$b = 0$ のとき　$a^2+bc = 1$ より、$a = \pm 1$　$m = c / (2a) = \pm c / 2$
直線は $y = \pm (c/2)x$

　$b \neq 0$ のとき $m = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2+bc}}{b} = \dfrac{-a \pm 1}{b}$　直線は　$y = \dfrac{-a \pm 1}{b}x$

(ｲ)　$x = 0$ のとき、$x' = by$ 、変換で $x' = 0$ だから $b = 0$ で $a = \pm 1$ 、直線は $x = 0$

(ｱ)、(ｲ)をまとめて　$b = 0$ のとき、$a = \pm 1$　　直線は　$y = \pm \dfrac{c}{2}x$ 、 $x = 0$

$b \neq 0$ のとき、直線は　$y = \dfrac{-a \pm 1}{b}x$

Training ２１　　空間において点 M (x,y,z) を
点 M' (x',y',z') にうつす変換 f を次の式に
よって定める。

$$\begin{cases} x' = x + 2y + 2z - 4 \\ y' = -2x - 3y - 2z + 10 \\ z' = 2x + 2y + z - 6 \end{cases}$$

⑴　変換 f は逆変換 f^{-1} をもち、$f^{-1} = f$ であることを示せ。

⑵　この変換によって変わらない点の集合はどのような図形となるか調べよ。

⑶　$\overrightarrow{MM'}$ はある一定な平面に平行で、線分 MM' の中点 I は一定直線上にあることを示せ。
次に、この変換の図形的な意味を説明せよ。

(略解)⑴　$x' + 2y' + 2z' - 4 = (x+2y+2z-4)+2(-2x-3y-2z+10)+2(2x+2y+z-6) -4 = x$
$-2x' - 3y' - 2z' + 10 = -2(x+2y+2z-4)-3(-2x-3y-2z+10)-2(2x+2y+z-6)+10 = y$
$2x' + 2y' + z' - 6 = 2(x+2y+2z-4)+2(-2x-3y-2z+10)+(2x+2y+z-6) -6 = z$
　よって、　$f^{-1} = f$

⑵　変わらない点を (x,y,z) とすると、

$x = x+2y+2z-4$　整理して $y+z = 2$　…①　　③+①=②　だから、求める図形は
$y = -2x-3y-2z+10$　　$x+2y+z = 5$ …②　　直線 $x-1 = -(y-2) = z$ となる。
$z = 2x+2y+z-6$　　$x+y = 3$　…③　　(他にもいろいろ別の表し方あり。)

⑶　$\overrightarrow{MM'} = (2y+2z-4, -2x-4y-2z+10, 2x+2y-6) = (X,Y,Z)$ とおくと $X + Y + Z = 0$
　$\overrightarrow{MM'}$ は、平面 $x + y + z = 0$ に平行
線分 MM' の中点 I は、$(x+y+z-2, -x-y-z+5, x+y+z-3)$ で (X,Y,Z) とおくと、
　$X+Y = 3$、$Y+Z = 2$、$X+2Y+Z = 5$ で⑵と同じ直線 $x-1 = -(y-2) = z$ ・・・ (＊) となる。
変換 f の図形的な意味は、直線 (＊) に対称で、方向は平面 $x+y+z = 0$ に平行。