数学散歩　XⅣ-6　　　　　　　２０２０．１２．$\beta$　　岐阜市　村山錞司

「ﾓﾉｸﾞﾗﾌ新書19 演習 外国の問題（Ⅳ）（いろいろな問題） 江原誠 科学新興社」

ｼﾘｰｽﾞ ４冊目/５冊です。（まえがきから）・・・数学Ⅰ、数学ⅡB の範囲での fresh ないろいろな問題を・・・。（頭が変になりそうでした。）つまみ食いして紹介します。解など点検をよろしく。（問題は、演習１～４２と、各演習に続く Traininng １～２８ からなっています。）

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜問題、略解、解説など＞

演習１　$\sqrt[3]{2}$ 無理数であることが分かっているとき、次の問に答えよ。

(1)　a、b を有理数とするとき、$a + b\sqrt[3]{2} = 0$ ならば、$a = b = 0$ であることを示せ。

(2)　a、b、c を有理数とするとき、$a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0$ ならば、$a = b = c = 0$ であることを示せ。

（略解）(1)　略　(2)　$a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0$ …①　　①×$\sqrt[3]{2}$ より

$2c + a\sqrt[3]{2} + b\sqrt[3]{4} = 0$ …②

①、②から $\sqrt[3]{4}$ を消去（①×b － ②×c）、$(ab - 2c^2) + (b^2 - ac)\sqrt[3]{2} = 0$

$ab - 2c^2$、$b^2 - ac$　が有理数で $\sqrt[3]{2}$ が無理数だから、$ab - 2c^2 = 0$、$b^2 - ac = 0$

$abc = 2c^3$、$b^3 = abc$、　よって、　$b^3 / c^3 = 2$　　$b/c = \sqrt[3]{2}$

b/c は有理数だから不可。よって、$b = c = 0$ で、$a = 0$

演習６　集合 G の任意の要素 a、b に対して、２つの演算 a∘b、a*b が定義されていて a∘b ∈ G、a*b ∈ G であり、かつ、次の２つの条件を満たしている。

❶　G の要素 e、f が存在して、G の任意の要素 a に対して a∘e = e∘a = a、a*f = f*a = a である。

❷　G の任意の要素 a、b、c、d について (a*b)∘(c*d) = (a∘c)*(b∘d)　が成り立つ。

このとき、次の(1)、(2)、(3)を示せ。

(1)　e = f　　(2)　G の任意の要素 a、b について a∘b = a*b

(3)　G の任意の要素 a、b、c について a∘b = b∘a 、a∘(b∘c) = (a∘b)∘c

（感想：頭が狂いそうになりましたが、その分、タップリ楽しめました。判読をよろしく。）

（略証）(1)　❶で f∘e = e∘f = f 、e∘e = e 、e*f = f*e = e 、f*f = f

❷で (e*f)∘(f*e) = (e∘f)*(f∘e) より e∘e = f*f だから e = f

(2)　❷で　(a*e)∘(e*b) = (a∘e)*(e∘b)　(1)で e = f だから　左辺 = (a*f)∘(f*b) = a∘b

また❶より 右辺 = a*b　だから　　a∘b = a*b

(3)　❷で　(e*a)∘(b*e) = (e∘b)*(a∘e)　(1)で e = f だから　左辺 = (f*a)∘(b*f) = a∘b

また(2)より 右辺 = b*a = b∘a　　だから　　a∘b = b∘a

次に❷より　　(a*f)∘(b*c) = (a∘b)*(f∘c)

(2)で a*b = a∘b だから 左辺 = (a∘f)∘(b∘c) = a∘(b∘c)

また、f∘c = f*c = c より　右辺 = (a∘b)*c = (a∘b)∘c　　よって　a∘(b∘c) = (a∘b)∘c

演習１２　(1)　n を自然数とするとき $P_n(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ について次の問に答えよ。

ⅰ　数学的帰納法により、$P_n(x)$ は $(x-1)^2$ で割り切れることを示せ。

ⅱ　$P_n(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの商を $Q_n(x)$ とする。$Q_{k+1}(x)$ と $Q_k(x)$ の関係を求めよ。次に、それを使って $Q_n(x)$ を求めよ。

(2)　P(x) を x の５次式とする。P(x)+2 は $(x+1)^3$ で割り切れ、P(x)−2 は $(x-1)^3$ で割り切れるとき P(x) を求めよ。

（略解）(1) ⅰ　［1］　n = 1 のとき $P_1(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ だから $(x-1)^2$ で割り切れる。

［2］　$P_k(x) = kx^{k+1}-(k+1)x^k+1$　、　$P_{k+1}(x) = (k+1)x^{k+2}-(k+2)x^{k+1}+1$　より

$P_{k+1}(x) - P_k(x) = (k+1)x^{k+2}-2(k+1)x^{k+1}+(k+1)x^k = (k+1)x^k\cdot(x-1)^2$　…(*)

$P_{k+1}(x) = P_k(x) + (k+1)x^k\cdot(x-1)^2$

$P_k(x)$ が $(x-1)^2$ で割り切れれば $P_{k+1}(x)$ も割り切れる。

数学的帰納法より n が自然数のとき、$P_n(x)$ は $(x-1)^2$ で割り切れる。

ⅱ　ⅰの(*)を $(x-1)^2$ で割れば、$Q_{k+1}(x) - Q_k(x) = (k+1)x^k$　　また $Q_1(x) = 1$ だから

$Q_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = nx^{n-1} + \cdots + 3x^2 + 2x + 1$

(2)　$P'(x) = a(x+1)^2(x-1)^2 = a(x^2-1)^2 = a(x^4-2x^2+1)$ より、… $P(x) = (3x^5-10x^3+15x)/4$

（本にはないが、気になったことを２点）

＜参考１＞ 組立除法により $P_n(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ を x − 1 で２度割れば$Q_n(x)$ が得られる。

＜参考２＞ $1+x+x^2+ \cdots +x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$　微分して　$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1} = \dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$

Training　8　(1)略　(2)　$f(x) = (x+1)^{6n+1}-x^{6n+1}-1$ は $g(x) = (x^2+x+1)^2$ で割り切れることを示せ。

（略解）⑵　$x^2+x+1=0$ より　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$、$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\omega$ とおくと　$\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

２根は$\omega$、$\omega^2$ で　$\omega^2+\omega+1=0$　、　$\omega+1=-\omega^2$　、　$\omega^2+1=-\omega$　、　$\omega^3=1$

$g(x)=(x^2+x+1)^2=(x-\omega)^2(x-\omega^2)^2$

（$f(x)$ が $(x-\alpha)^2$ で割り切れるためには、$f(\alpha)=0$、$f'(\alpha)=0$ ）

$f(\omega)=(\omega+1)^{6n+1}-\omega^{6n+1}-1=(-\omega^2)^{6n+1}-\omega^{6n+1}-1=-\omega^2-\omega-1=0$

$f'(x)=(6n+1)\{(x+1)^{6n}-x^{6n}\}$

$f'(\omega)=(6n+1)\{(\omega+1)^{6n}-\omega^{6n}\}=(6n+1)(1-1)=0$　$f(x)$ は $(x-\omega)^2$ で割り切れる。

同様に $f(\omega^2)=(\omega^2+1)^{6n+1}-\omega^{2(6n+1)}-1=(-\omega)^{6n+1}-\omega^2-1=-\omega^2-\omega-1=0$

$f'(\omega^2)=(6n+1)\{(\omega^2+1)^{6n}-\omega^{12n}\}=(6n+1)(1-1)=0$　$f(x)$ は $(x-\omega^2)^2$ で割り切れる。

よって、$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れる。

演習１４　関数 $f(x)$ は任意の実数 $x$、$y$ に対して $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ を満たしている。このとき次を示せ。

⑴　$f(0)=0$ なら $f(x)$ は恒等的に 0 である。

⑵　$f(x)$ は恒等的に 0 ではないとする。このとき、$f(c)=0$ となる $c$ が存在すれば $4c$ は $f(x)$ の周期であり、また $f(4c)=1$、$f(2c)=-1$ である。

⑶　$f(x)$ は恒等的に 0 ではないとする。$b$ は $f(x)$ の周期であるが $b/2$ は $f(x)$ の周期でないとき $f(b/2)=-1$、$f(b/4)=0$ である。

（本の解説から：$f(x)$ のモデルは $\cos x$ であり・・・）

（略解）⑴　$f(0)=0$ のとき、条件式で $y=0$ とすると、左辺 $=f(x+0)+f(x-0)=2f(x)$、右辺 $=2f(x)f(0)=0$ だから、恒等的に $f(x)=0$

⑵　$x=y=0$ とすると、$2f(0)=2\{f(0)\}^2$ 。⑴より、$f(0)\neq 0$ だから $f(0)=1$

$c$ が存在して $f(c)=0$ $(c\neq 0)$ とする。$x=y=c$ として $f(2c)+f(0)=2f(c)\cdot f(c)=0$

$f(0)=1$ だから $f(2c)=-1$

次に、$x=y=2c$ として、$f(4c)+f(0)=2f(2c)\cdot f(2c)=2$　∴ $f(4c)=1$

《追加の問題》 $f(-x)=f(x)$ を示せ。

⑶　$b$ が周期で、$b/2$ が周期でないとすると、$f(x-(b/2))=f(x-(b/2)+b)=f(x+(b/2))\neq f(x)$

$x=b/2$ として $f(0)=f(b)=1\neq f(b/2)$

最初の条件式で　$x=y=b/2$ として $f(b)+f(0)=2\{f(b/2)\}^2$　∴ $\{f(b/2)\}^2=1$

$f(b/2)\neq 1$ だから　$f(b/2)=-1$

$x=y=b/4$ として $f(b/2)+f(0)=2\{f(b/4)\}^2$

左辺 $=-1+1=0$ だから $f(b/4)=0$

Training　１８　$p$ をある自然数とするとき $S(n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)\cdots(k+p)}$ とおく。

$S(n)=\dfrac{1}{p\cdot p!}-\dfrac{n!}{p\cdot(n+p)!}$　であることを示せ。

（略証）

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)\cdots(k+p)}=\frac{(k+p)-k}{k(k+1)(k+2)\cdots(k+p)}\cdot\frac{1}{p}$$

$$=\frac{1}{p}\left\{\frac{1}{k(k+1)(k+2)\cdots(k+p-1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+p)}\right\}$$ より

$$S(n)=\frac{1}{p}\left\{\frac{1}{1\cdot2\cdots p}-\cancel{\frac{1}{2\cdot3\cdots(p+1)}}\right\}$$

$$+\frac{1}{p}\left\{\cancel{\frac{1}{2\cdot3\cdots(p+1)}}-\cancel{\frac{1}{3\cdot4\cdots(p+2)}}\right\}+\cdots$$

$$+\frac{1}{p}\left\{\cancel{\frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)}}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+p)}\right\}$$

$$=\frac{1}{p\cdot p!}-\frac{n!}{p\cdot(n+p)!}\quad\left(\because\ \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+p)}=\frac{n!}{(n+p)!}\right)$$

Training　１９　すべての自然数 $n$ に対して　$F_n=\dfrac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$　は整数であることを示せ。

（参考）ﾌｨﾎﾞﾅｯﾁ数列　$F_1=1$、$F_2=1\ \cdots\ F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$　の問題であり、証明は省略する。

《追加の問題》　ﾌｨﾎﾞﾅｯﾁ数列　$F_1=1$、$F_2=1\ \cdots\ F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$　について次を示せ。

(A)　奇数項の和　$F_1+F_3+\cdots+F_{2n-1}=F_{2n}$

(B)　偶数項の和　$F_2+F_4+\cdots+F_{2n}=F_{2n+1}-1$　　（証明は略。数学的帰納法で…）

(C)　一般の和　$F_1+F_2+\cdots+F_n=F_{n+2}-1$

《演習１４⑵　追加問題の解》　$f(0+x)+f(0-x)=2f(0)f(x)$ より $f(x)+f(-x)=2f(x)$ から $f(-x)=f(x)$