数学散歩　XⅣ-7　　　　　　　　２０２０．１２．γ　　岐阜市　村山錞司

「ﾓﾉｸﾞﾗﾌ新書20 演習 外国の問題（Ⅴ）（腕だめしの問題） 江原誠 科学新興社」 ｼﾘｰｽﾞ の５冊目(ﾗｽﾄ)です。（まえがきから ・・・理系の生徒を対象にして、考えて面白く・・・入試問題にあきたとき、気分転換のつもりで気楽に接して・・・）気ままに紹介します。

答は私が勝手につくったものもあります。解など点検をよろしく。

(問題は、演習１～３９と、各演習に続く Training １～３１ からなっています。)

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあればお聞かせください。

＜問題、略解、解説など＞

演習１ 1. 連続する３つの正の奇数の平方の和が 10 進法で xxxx という形に書けるという。３つの奇数を求めよ。

2. 6 進法で 5x23 と書かれている数を N とする。

⑴ N が 7 で割り切れるように x の値を定めよ。

⑵ N が 5 で割り切れるように x の値を定めよ。

⑶ N が 35 で割り切れるようにすることができるか。

(略解) 1. n を正の整数とする。$(2n-1)^2 + (2n+1)^2 + (2n+3)^2 = x \times 1111$ より

$12n^2 + 12n + 11 = x \times 1111$ ∴ $12n(n+1) = 11 \cdot (101x - 1) \leqq 9988$

$n(n+1) \leqq 832.33\cdots$　n か n+1 は 11 の倍数

n	10	11	21	22	32
n(n+1)	110	132	462	506	~~1056~~
xxxx	1331	1595	5555	6083	不可

$12n(n+1) + 11 = xxxx$

n = 21 で３つの奇数は、41、43、45

2. $N = 5 \cdot 6^3 + x \cdot 6^2 + 2 \cdot 6 + 3 = 1080 + 36x + 12 + 3 = 1095 + 36x$

⑴ $N = 7(5x + 156) + (x + 3)$ 、$0 \leqq x < 6$ より $x+3 = 7$ で $x = 4$

⑵ $N = 5(7x + 219) + x$ 、$0 \leqq x < 6$ より $x = 0$、5

⑶ $N = 35(x + 31) + (x + 10)$ 、$0 \leqq x < 6$ より $x + 10$ は 35 の倍数にならない。不可

Training 1 ⑴ 自然数 N は 11 進法で abca と書け、 7 進法で bbac と書ける。N を 10 進法で表せ。

⑵ 自然数 A は x 進法で 75 と書け、y 進法では 49 と書ける。また、自然数 B は x 進法で 310 と書け、y 進法では 125 と書ける。A と B を求めよ。

(略解) ⑴ $N = a \cdot 11^3 + b \cdot 11^2 + c \cdot 11 + a = b \cdot 7^3 + b \cdot 7^2 + a \cdot 7 + c$　$1 \leqq a$、$b < 7$、$0 \leqq c < 7$

$1331a + 121b + 11c + a = 392b + 7a + c$ より $5(265a + 2c) = 271b$ だから

$b = 5$、$265a + 2c = 271$ で $a = 1$、$c = 3$ より $N = 1970$

⑵ $A = 7x + 5 = 4y + 9$ 、$7x = 4(y+1)$ 、x は 4 の倍数、$7 < x$ 、$9 < y$ より $x = 8$、$y = 13$ として $A = 61$。 $B = 3x^2 + x = y^2 + 2y + 5$ より $B = 3 \cdot 8^2 + 8 = 13^2 + 2 \cdot 13 + 5 = 200$

Training 3 ⑴ n を整数、x、y、z を実数とすると、$y^2 = xz$ のとき、

$(x^n + y^n + z^n) \cdot (x^n - y^n + z^n) = x^{2n} + y^{2n} + z^{2n}$ であることを示せ。次に、どんな条件のもとで、この逆が成り立つかどうかを調べよ。

⑵ ⑴の結果を使って、次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} y^2 = xz \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 26 \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2} = 364 \end{cases}$$

(略解) ⑴ $(x^n+y^n+z^n) \cdot (x^n-y^n+z^n) - (x^{2n} + y^{2n} + z^{2n}) = \{(x^n+z^n)^2 - y^{2n}\} - x^{2n} - y^{2n} - z^{2n}$

$= 2(x^nz^n - y^{2n}) = 2\{(xz)^n - (y^2)^n\} = 0$

よって、$y^2 = xz$ のとき等式は成立する。逆に、n が奇数のときは $y^2 = xz$ $(xz \geqq 0)$ でよいが、n が偶数のとき、$y^2 = \pm xz$ でも等式は成立。 n が奇数か、x、z が同符号のとき逆が成り立つ。

⑵ $n = -1$ とすると $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2}$

$26\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) = 364$ より $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{364}{26} = 14$

$\dfrac{1}{y} = 6$ 、 $y = \dfrac{1}{6}$、 $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = 20$ 、 $\dfrac{1}{xz} = \dfrac{1}{y^2} = 36$ 、 ・・・

(答) $(x, y, z) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{18}\right)$ 、 $\left(\dfrac{1}{18}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{2}\right)$

Training　１３　$A=\begin{pmatrix}1&2\\-2&-1\end{pmatrix}$ のとき、AX = XA となるような行列 X の集合を S とする。
次を示せ。
(1)　E を単位行列とすると、S の任意の要素 X は X = αA+βE（α、βは実数）の形に書ける。
(2)　S の要素は乗法という演算について閉じていて、S ∋ X ≠ O（O は零行列）は逆行列 A^{-1} をもち、$X^{-1} \in S$ である。

（略解）(1)　$X=\begin{pmatrix}x&y\\u&v\end{pmatrix}$ とすると　$\begin{pmatrix}1&2\\-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\u&v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&y\\u&v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-2&-1\end{pmatrix}$　より

$\begin{pmatrix}x+2u&y+2v\\-2x-u&-2y-v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-2y&2x-y\\u-2v&2u-v\end{pmatrix}$　∴　$x+2u=x-2y$、$y+2v=2x-y$、$-2x-u=u-2v$、$-2y-v=2u-v$

よって　$\begin{cases}u=-y\\v=x-y\end{cases}$　$X=\begin{pmatrix}x&y\\-y&x-y\end{pmatrix}=\alpha A+\beta E=\begin{pmatrix}\alpha+\beta&2\alpha\\-2\alpha&\alpha+\beta\end{pmatrix}$

$\alpha+\beta=x$、$2\alpha=y$ だから、$\alpha=y/2$、$\beta=x-(y/2)$ とすればよい。

(2)　$S=\left\{\begin{pmatrix}x&y\\-y&x-y\end{pmatrix}\,\middle|\,x、y は実数\right\}$　$S\ni X=\begin{pmatrix}x&y\\-y&x-y\end{pmatrix}$、$Y=\begin{pmatrix}p&q\\-q&p-q\end{pmatrix}$

とすると $X\cdot Y=\begin{pmatrix}px-qy&qx+(p-q)y\\-\{qx+(p-q)y\}&(px-qy)-\{qx+(p-q)y\}\end{pmatrix}\in S$　乗法について閉じている。

$X\neq O$ より $x(x-y)+y^2=x^2-xy+y^2>0$　　$X^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{x-y}{x^2-xy+y^2}&\dfrac{-y}{x^2-xy+y^2}\\\dfrac{y}{x^2-xy+y^2}&\dfrac{x}{x^2-xy+y^2}\end{pmatrix}\in S$

（本では、(1)の αA+βE を利用している。）

演習２１　行列 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ による１次変換を f とするとき、平面上の任意のベクトル **u**、**v** に対して、**u**・f(**v**) = **v**・f(**u**) が成り立つ条件は A が対称行列であることを示せ。

（略証）　$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$、$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$、$f(\mathbf{u})=\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}$、$f(\mathbf{v})=\begin{pmatrix}aX+bY\\cX+dY\end{pmatrix}$　より

u・f(**v**) = **v**・f(**u**)　から　$x(aX+bY)+y(cX+dY)=X(ax+by)+Y(cx+dy)\Leftrightarrow(b-c)(xY-Xy)=0$

u、**v**　任意だから、b = c

逆に、b = c のとき　**u**・f(**v**) = **v**・f(**u**)　が成立。

Training　２７（相加平均≧相乗平均 の証明）（参考：「数学散歩 V-1、2 2016.9.α.β」）
次の(1)～(3)を示せ。
(1)　$x>0$ のとき $\log x \leqq x-1$ である。
(2)　$x_i>0$（$i=1,2,3,\cdots,n$）とし、$M=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_i$ とおくとき　$\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log x_i \leqq \log M$ である。
(3)　(2)から　$\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ \cdots\ \cdot x_n}\leqq\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_i$　である。

（略証）(1)　$f(x)=\log x-(x-1)$ とおくと $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1=-\dfrac{x-1}{x}$

$x=1$ のとき、最大値 $f(1)=0$ より、$\log x\leqq x-1$

(2)　$M=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_i$　とおくと　$n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{x_i}{M}$　(1)より $\log\dfrac{x_i}{M}\leqq\dfrac{x_i}{M}-1$

$i=1,2,\cdots,n$ を加えて　$\sum_{k=1}^{n}\log\dfrac{x_i}{M}\leqq\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{x_i}{M}-1\right)=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{x_i}{M}-n=0$

よって　$\sum_{k=1}^{n}\log\dfrac{x_i}{M}=\sum_{k=1}^{n}(\log x_i-\log M)=\sum_{k=1}^{n}\log x_i-n\log M\leqq 0$

∴　$\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log x_i\leqq\log M=\log\left(\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_i\right)$

(3)　(2)より　$\log(x_1\cdot x_2\cdot\ \cdots\ x_n)^{\frac{1}{n}}\leqq\log\left(\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_i\right)$

∴　$\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ \cdots\ \cdot x_n}\leqq\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_i$