数学散歩　ＸＶ-1　　　　　　　　　２０２１．１．　α　　岐阜市　村山錞司

「科学新興社 ﾓﾉｸﾞﾗﾌ ２．不等式 矢野健太郎 監修 飯尾和義 著」　1/4

高校生のための項目別詳解ﾊﾝﾄﾞﾌﾞｯｸ（全25巻）　1 漸化式 ～ 25 新選数表 の中の 2 冊目の本（1966年 8月 1日 初版第１刷発行・・・）で、手元にあるのはこの本だけ。他の 24 冊については、図書館にもないのではないかと思われます。昔を想い出しながら楽しんで（？）不等式の問題に取り組みたいと思います。私の勝手な思い込みの〔答〕もあると思いますので点検をよろしく。

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜問題、略解、解説など＞

１．　$z = \dfrac{(x+y)+|x-y|}{2}$　は x 、y のうちの大きい方を表わすことを示せ。また、x 、y のうちの小さい方はどんな式で表わされるか。

（略解）　x≧y のとき　$\dfrac{(x+y)+|x-y|}{2} = x$ 、x＜y のとき　$\dfrac{(x+y)+|x-y|}{2} = y$

x 、y の小さい方は　$\dfrac{(x+y)-|x-y|}{2}$

《覚書》（以後、同様）（（本）4頁 問題１-2)

２．　0＜m＜3 のすべての m の値に対して、不等式 2x-1＞m(x-2) が成り立つような x の値の範囲を求めよ。　（岡山大）

（略解）（本の解を参考に）　f(m) = m(x-2)-(2x-1) とおくと f(m)＜0 となればよい。

(ｲ)　x＞2 のとき　x-2＞0、f(m) は m について単調増加で 0＜m＜3 だから
f(3) = 3(x-2)-(2x-1) = x-5 ≦ 0 であればよい。　∴　2 ＜ x ≦ 5

(ﾛ)　x=2 のとき　f(m) = -3　適

(ﾊ)　x＜2 のとき　x-2＜0 だから、f(m) は m について単調減少で 0＜m＜3 だから
f(0) = -(2x-1)≦0 より x≧1/2 であればよい。　∴　1/2 ≦ x ＜ 2

(ｲ)、(ﾛ)、(ﾊ)より、1/2 ≦ x ≦ 5

（別解(M)）(A)　x＜2 のとき m＞0 で m(x-2)＜0 だから
2x-1≧0 即ち 1/2 ≦ x ＜ 2 であれば不等式 2x-1＞m(x-2) は成立

(B)　x=2 のとき　4-1 = 3 ＞ 0 だから不等式 2x-1＞m(x-2) は成立

(C)　x＞2 のとき(0＜) m＜3 だから x-2＞0、m-3＜0 より
0 ＞(m-3)(x-2) = m(x-2)-3(x-2) = {m(x-2)-(2x-1)}-(x-5)
より　x-5 ＞ m(x-2)-(2x-1) となって
0≧x-5 即ち x≦5 であれば不等式 2x-1＞m(x-2) は成立 ∴ 2＜x≦5

(A)、(B)、(C) より　1/2 ≦ x ≦ 5　（6頁 例３）

３．　100 人が各人１票を投票して 5 人の委員を互選するのに、何票を得ると当選確実か。　（久留米大）

（略解）　得票の多い順に並べ、上位から 6 人が x 票以上とるとして　6x≦100　x≦50/3=16.66…
6 人が 16 票とると、100-6×16 = 4　4 票の余り。16 票でも落選。
5 人が 17 票とすると 100-5×17 = 15、残りは 15 票以下。当選確実は 17 票以上。（6頁 例４）

４．　ある会合の費用を出席者から集めることにしました。１人から 850 円ずつ集めると 1300 円余り、800 円ずつ集めることにしても、なお、最後の１人だけは 200 円未満でよい計算になる。出席者は何人から何人までか。　（関西大）

（感想　この方は幹事失格です。200 円未満とはタダでもよいということか、そんな馬鹿な？）

（略解）　出席者数を x 人、費用を N 円とすると、850x = N+1300、800(x-1) ≦ N ＜ 800(x-1)+200
より、800x-800≦850x-1300＜800x-600　10≦x＜14、　10 人以上 13 人以下。　（7頁 問題２-6)

５．　放物線 $y = x^2-8x+14$ のグラフで、この放物線上の点 P(x,y) からこの放物線の軸までの距離が x 軸までの距離より大となるための x の値の範囲を求めよ。　（岩手医大）

（略解）　放物線は $y = (x-4)^2-2$ となり、軸は x = 4。軸と x 軸との交点 (4,0) を M とする。
点 M を通り傾きが 1 の直線 y = x-4 と放物線との交点は $x^2-8x+14 = x-4$ から
A(3,-1)、B(6,2) 、傾きが -1 の直線 y = -x+4 と放物線との交点は $x^2-8x+14 = -x+4$ から
C(2,2)、D(5,-1) 。点 P が放物線上で C、A 間と D、B 間（端点は除く）にあれば
条件を満たすから、求める x の範囲は 2 ＜ x ＜ 3 、5 ＜ x ＜ 6 （図略）　(9頁 例３)

６．　次の不等式を満たす x の整数値を求めよ。

⑴　$9x^2-12x-1 < 0$　（関東学院大）　⑵　$51.2 > \dfrac{10(60-x)^2}{0.711}$　（東京歯大）

略解）⑴ 不等式から $\frac{2-\sqrt{5}}{3} < x \frac{2+\sqrt{5}}{3}$ 、$\sqrt{5} = 2.2\cdots$ より、$-1<x<2$ ∴ 整数値は 0、1

⑵ $(x-60)^2 < 51.2\times 0.711\div 10 = 3.6\cdots < 4$、$60-2<x<60+2$ 整数値は 59、60、61 （12頁 問題３-2）

７． x、y が正の数のとき、x、y の値のいかんにかかわらず $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y} \leqq a\sqrt[3]{x+y}$ が成り立つような a の値のうち最小のものを求めよ。 （金沢美工大）

（略解） $\sqrt[3]{x} = X$ 、$\sqrt[3]{y} = Y$ とおく。 $X+Y \leqq a\sqrt[3]{X^3+Y^3}$ 3 乗して $(X+Y)^3 \leqq a^3(X^3+Y^3)$

X+Y で割って $(X+Y)^2 \leqq a^3(X^2-XY+Y^2)$ $Y=Xt\ (t>0)$ とおくと $(t+1)^2 \leqq a^3(t^2-t+1)$ ・・・(*)

$a^3 \geqq \frac{(t+1)^2}{t^2-t+1}$、 $f(t) = \frac{(t+1)^2}{t^2-t+1}$ とおいて f(t) の最大値を求める。

$f'(t) = \cdots = -\frac{3(t+1)(t-1)}{(t^2-t+1)^2}$ $t>0$ より $t=1$ のとき 最大値は $f(1) = 4\ (=a^3)$ 、a の最小値は $\sqrt[3]{4}$

（参考 本では (*) の後、t についての判別式を利用） （13頁 問題３-17）

８． $f(x) = x^2-2ax+1$ (a は実数) を負にする実数値があるとき、 ⑴ a はどんな条件を満足するか。 ⑵ $g(x) = (x+2)(x-1)(x-a^2)$ とおくとき、$g(x)>0$ となる x の値の範囲を求めよ。 ⑶ $f(x)<0$ となるような任意の実数 x に対して $g(x)>0$ が成り立つための a の値の範囲を求めよ。 （大阪学大）

（略解）⑴ $y = f(x)$ のグラフが x 軸と交わればよいから判別式 $D/4 = a^2-1>0$ より $a<-1$、$a>1$

⑵ $y = g(x)$ と x 軸との交点の x 座標は小さい順に −2、1、a^2 （> 1） だから、$g(x)>0$ となるのは、$-2<x<1$、$x>a^2$

⑶ $f(x)<0$ より x の範囲は、 $a-\sqrt{a^2-1} < x < a+\sqrt{a^2-1}$ ⑵よりこの範囲が $-2<x<1$ または $x>a^2$ に含まれればよい。

(ｲ) $-2<x<1$ のとき、 $-2 \leqq a-\sqrt{a^2-1}$ 、 $a+\sqrt{a^2-1} \leqq 1$

$-2 \leqq a-\sqrt{a^2-1}$ 即ち $\sqrt{a^2-1} \leqq a+2$ から $-1 \leqq 4a+4$ ∴ $a \geqq -5/4$

$a+\sqrt{a^2-1} \leqq 1$ 即ち $\sqrt{a^2-1} \leqq 1-a$ から $-1 \leqq 1-2a$ ∴ $a \leqq 1$

⑴と合わせて $-5/4 \leqq a < -1$

(ﾛ) $x>a^2$ のとき $a^2 \leqq a-\sqrt{a^2-1} < a$ で $a^2 < a$ から $0<a<1$

⑴より適する a はない.

(ｲ)、(ﾛ) から 求める a の範囲は $-5/4 \leqq a < -1$ （15頁 問題４-7）

９． a を$\sqrt{3}$ に近い有理数で、 $b = \frac{a+3}{a+1}$ とする。 ⑴ $\sqrt{3}$ は a と b の間にあって、b は a よりもよい$\sqrt{3}$ の近似値であることを証明せよ。 ⑵ a と$\sqrt{3}$ との間にある有理数を表わすような a の有理式を１つ（どの１つでもよい）求め、その理由を記せ。 （東京教育大）

（略解）⑴ $a \fallingdotseq \sqrt{3}$ だから、$1<a<2$ とする。

$\sqrt{3}-b = \frac{(\sqrt{3}-1)a+\sqrt{3}-3}{a+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)(a-\sqrt{3})}{a+1}$ で $\frac{\sqrt{3}-1}{a+1} > 0$ より

$a-\sqrt{3}$ と$\sqrt{3}-b$ は同符号で、 $a<\sqrt{3}<b$ か $b<\sqrt{3}<a$ のどちらか。

また、 $0 < \frac{|\sqrt{3}-b|}{|a-\sqrt{3}|} = \frac{\sqrt{3}-1}{a+1} = \frac{2}{(a+1)(\sqrt{3}+1)} < \frac{1}{2}$ （∵ $a>1$ 、$\sqrt{3}>1$）

よって、b は a よりも$\sqrt{3}$ に近い近似値になる。

⑵ $b = \frac{a+3}{a+1}$ の右辺の a に b の式を代入して c とすると、

$c = \frac{b+3}{b+1} = \boxed{\frac{2a+3}{a+2}}$ が得られ、c は a の有理式である。

$c-\sqrt{3} = \frac{(2-\sqrt{3})(a-\sqrt{3})}{a+2}$ $a-\sqrt{3}$ と $c-\sqrt{3}$ は同符号。

$0 < \left|\frac{c-\sqrt{3}}{a-\sqrt{3}}\right| = \frac{2-\sqrt{3}}{a+2} = \frac{1}{(a+2)(2+\sqrt{3})} < \frac{1}{9}$ （∵ $a>1$ 、$\sqrt{3}>1$）

よって、c は a と$\sqrt{3}$ の間にあって、a よりもよい$\sqrt{3}$ の近似値になる。

（参考） 過去に、この「数学散歩」でも扱っている「連分数」について少し・・・

$\sqrt{3} = 1+(\sqrt{3}-1) = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+1} = \boxed{\frac{2\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+2}}$ いろいろやってみてください。

$= 1+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{3}+1}{2}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{3}-1}{2}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\sqrt{3}+1}} = \cdots$

（17頁 例３）