

「科学新興社 モノグラフ 2. 不等式 矢野健太郎 監修 飯尾和義 著」 2/4
ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

----- <問題、略解、解説など> -----

10. x が実数のとき、 x の関数 $\frac{x+c}{x^2-5x+4}$ がすべての実数値をとりうるための c の範囲を求めよ。(明治大)

(略解) $y = \frac{x+c}{x^2-5x+4}$ とおく。 $yx^2-(5y+1)x+4y-c=0 \cdots (*)$ $y=0$ とすると $x=-c$
このとき分母 $\neq 0$ だから、 $c^2+5c+4=(c+1)(c+4)=0$ $c=-1, -4$ として
 $c=-1$ のとき、 $y = \frac{x-1}{(x-1)(x-4)} = \frac{1}{x-4} \neq 0$ 、 $c=-4$ のとき同様に、 $y = \frac{1}{x-1} \neq 0$ 、
ともに $y=0$ はとり得ないから、 $c \neq -1, -4 \cdots \textcircled{1}$
前の $(*)$ で $y \neq 0$ の任意の実数 y について x が実根をもつためには、
 x についての判別式 $D=(5y+1)^2-4y(4y-c)=9y^2+2(2c+5)y+1 \geq 0$
この不等式が常に成立しなければならないから、 y についての判別式 (19頁 問題5-8)
 $D/4=(2c+5)^2-9=4c^2+20c+16=4(c+1)(c+4) \leq 0$ で $-4 \leq c \leq -1 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ から、 $-4 < c < -1$ なお、 $c \neq -4, -1$ のとき $x=-c$ とすれば $y=0$ となる。

11. $0 \leq x \leq 1$ なるどんな x の値に対しても、常に次の不等式が成り立つように
 $1+a(x-x^2) \leq \frac{1}{\sqrt{1-x+x^2}} \leq 1+b(x-x^2)$ 定数 a, b の値の範囲を求めよ。(早稲田大)

(略解) $0 \leq x \leq 1$ より $t = x-x^2 = x(1-x) \geq 0$ 。 $x=0, 1$ のとき $t=0$ で問題の不等式は常に成立し、
 a, b は任意の実数でよい。 $0 < x < 1$ のとき、 $t = -\{x-(1/2)\}^2 + (1/4) \leq 1/4$ より $0 < t \leq 1/4$
問題の不等式は $1+at \leq 1/\sqrt{1-t} \leq 1+bt$ 、ここで、 $(1/\sqrt{1-t})-1 = \cdots = t / \{1-t+\sqrt{1-t}\}$
を利用すると $at \leq \frac{t}{1-t+\sqrt{1-t}} \leq bt$ t で割って逆数をとれば $\frac{1}{b} \leq 1-t+\sqrt{1-t} \leq \frac{1}{a}$
 $f(t) = 1-t+\sqrt{1-t}$ とおくと、 $f'(t) = -1 + (-1)/(2\sqrt{1-t}) < 0$ で $f(t)$ は単調減少
 $0 < t \leq 1/4$ で $f(0) = 2, f(1/4) = (3/4) + \{(\sqrt{3})/2\} = (3+2\sqrt{3})/4$
 $2 \geq f(t) \geq (3+2\sqrt{3})/4$ 逆数をとって $\frac{1}{2} < \frac{1}{1-t+\sqrt{1-t}} \leq \frac{4}{3+2\sqrt{3}} = \frac{4(2\sqrt{3}-3)}{3}$
以上から、どんな x の値に対しても常に不等式が成立する a, b の値の範囲は、
 $a \leq \frac{1}{2}, b \geq \frac{4(2\sqrt{3}-3)}{3}$ (22頁 問題6-4)

12. 正の整数 a, b ($a < b$) に対して $a \leq a^x b^{1-x} \leq b$ となるような x の値の範囲を求めよ。

(略解) $b > 0$ で割ると $\frac{a}{b} \leq (\frac{a}{b})^x \leq 1, 0 < a/b < 1$ より $0 \leq x \leq 1$ (23頁 例1)

13. 等式 $n^2 - n([\log_a n])^2 + 8 = 0$ を満たす整数 n がある。 a の値の範囲を求めよ。
ただし、 $[\log_a n]$ は $\log_a n$ をこえない最大の整数を表わす。(九州工大)

(略解) (対数 $\log_a n = T$: ① $n = a^T$ ② 真数 n は正の数 ③ 底 a は1でない正の数)
 $n^2 - n([\log_a n])^2 + 8 = 0$ から $n\{([\log_a n])^2 - n\} = 8$ で n は8の約数 $n = 1, 2, 4, 8$
 $n = 1$ のとき、 $1(0-1) = -1 \neq 8$ で不可
 $n = 2$ のとき、 $2([\log_a 2])^2 - 2 = 8, [\log_a 2]^2 = 6$ 6は平方数でない。
 $n = 4$ のとき、 $4([\log_a 4])^2 - 4 = 8, [\log_a 4]^2 = 6$ 6は平方数でない。
 $n = 8$ のとき、 $8([\log_a 8])^2 - 8 = 8, [\log_a 8]^2 = 9, [\log_a 8] = \pm 3$
(1) $[\log_a 8] = 3$ のとき $3 \leq \log_a 8 < 4$ より $a^3 \leq 8 < a^4 \therefore \sqrt[4]{8} < a \leq 2$
(2) $[\log_a 8] = -3$ のとき $-3 \leq \log_a 8 < -2$ より $-3 \leq 3\log 2 / \log a < -2$
 $\therefore \log a < 0 \quad (-3/2)\log 2 < \log a \leq -\log 2$
 $(2^{-(3/2)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} =) \frac{\sqrt{2}}{4} < a \leq \frac{1}{2}$
(1), (2)より、 $\frac{\sqrt{2}}{4} < a \leq \frac{1}{2}, \sqrt[4]{8} < a \leq 2$ (26頁 問題7-6)

14. $(\log x)^2 + (\log y)^2 = \log x^2 + \log y^2$ のとき、 x/y の値の範囲を求めよ。
対数は常用対数とする。(岐阜薬大)

(略解) 変形して $(\log x - 1)^2 + (\log y - 1)^2 = 2$ $x/y = t$ として (注) $x/y = \frac{x}{y}$
 $(\log y + \log t - 1)^2 + (\log y - 1)^2 = 2$

$$2(\log y - 1)^2 + 2(\log y - 1) \cdot \log t + (\log t)^2 - 2 = 0$$

$$X = \log y - 1 \text{ とおくと } 2X^2 + 2X \cdot \log t + (\log t)^2 - 2 = 0$$

$$X \text{ についての判別式 } D/4 = (\log t)^2 - 2\{(\log t)^2 - 2\} = -(\log t)^2 + 4 \geq 0$$

$$-2 \leq \log t \leq 2, t = \frac{x}{y} \quad \therefore \frac{1}{100} \leq \frac{x}{y} \leq 100 \quad (26\text{頁 問題7-13})$$

15. $f(x) = a + b \cos x + c \sin x$ のグラフが 2 点 $(0, 1)$ 、 $(\pi/2, 1)$ を通り、かつ $0 \leq x \leq \pi/2$ で $|f(x)| \leq 2$ であるとき、 a の値はどのような範囲にあるか。 (東京工大)

(略解) 2 点を通るから、 $f(0) = a+b = 1$ 、 $f(\pi/2) = a+c = 1$ よって $b = c = 1-a$ だから

$$f(x) = a + (1-a)(\cos x + \sin x) = a + (1-a)\sqrt{2} \sin(x + \pi/4)$$

$$0 \leq x \leq \pi/2 \text{ より } \pi/4 \leq x + \pi/4 \leq 3\pi/4 \text{ だから } 1/\sqrt{2} \leq \sin(x + \pi/4) \leq 1$$

$$\text{より } 1 \leq \sqrt{2} \sin(x + \pi/4) \leq \sqrt{2} \quad \text{また } -2 \leq f(x) \leq 2$$

$$(i) \quad a \leq 1 \text{ のとき } 1-a \geq 0 \text{ より } 1-a \leq (1-a)\sqrt{2} \sin(x + \pi/4) \leq \sqrt{2}(1-a)$$

$$a \text{ を加えて } 1 \leq a + (1-a)\sqrt{2} \sin(x + \pi/4) \leq a + \sqrt{2}(1-a) \leq 2 \quad (1-\sqrt{2})a \leq 2-\sqrt{2} \text{ で}$$

$$(\sqrt{2}-1)a \geq \sqrt{2}-2 = -\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) \text{ だから } a \geq -\sqrt{2} \quad \therefore -\sqrt{2} \leq a \leq 1$$

$$(ii) \quad a > 1 \text{ のとき } 1-a < 0 \text{ より } 1-a \geq (1-a)\sqrt{2} \sin(x + \pi/4) \geq \sqrt{2}(1-a)$$

$$a \text{ を加えて } 1 \geq a + (1-a)\sqrt{2} \sin(x + \pi/4) \geq a + \sqrt{2}(1-a) \geq -2 \quad (1-\sqrt{2})a \leq -2-\sqrt{2} \text{ で}$$

$$(\sqrt{2}-1)a \leq 2+\sqrt{2} \text{ だから } \sqrt{2}+1 \text{ をかけて } a \leq 4+3\sqrt{2} \quad \therefore 1 < a \leq 4+3\sqrt{2}$$

$$(i), (ii) \text{ から } -\sqrt{2} \leq a \leq 4+3\sqrt{2} \quad (28\text{頁 例4})$$

16. 相異なる 4 つの整数 a, b, c, d (ただし、 $a < b < c < d$) から 2 つずつ取り出して和をつくったら 49, 54, 57, 58, 61, 66 となった。

(1) $a+b, c+d$ はいくらか。 (2) $a+c, b+d$ はいくらか。 (3) a, b, c, d はいくらか。 (鹿児島大)

(略解) $a < b < c < d$ により 2 つずつの和を小さい順に並べると、

$$a+b < a+c < a+d \text{ (?) } b+c < b+d < c+d \text{ だから } (1) \ a+b=49, c+d=66 \quad (2) \ a+c=54, b+d=61$$

$$(3) \ (i) \ a+d=57, b+c=58 \text{ か } (ii) \ a+d=58, b+c=57 \text{ のどちらか。} \quad (30\text{頁 例1})$$

$$(i) \text{ のとき } (a+b)+(a+d)=49+57=106, \quad 2a+(b+d)=2a+61=106 \text{ で } 2a=45 \text{ で不可}$$

$$(ii) \text{ のとき } (a+b)+(a+d)=49+58=107 \text{ 同様に } 2a=46 \text{ で } a=23, b=26, c=31, d=35$$

17. 直方体の 1 つの頂点 O から出る 3 つの辺を OA, OB, OC とし、 O から最も遠い頂点を D とする。 $BC=a, CA=b, AB=c$ とするとき、 OD の長さを a, b, c で表せ。また、 $a=5, b=3$ のとき、 c のとり得る値の範囲を求めよ。 (東京大)

(略解) O を原点、 OA, OB, OC をそれぞれ x 軸、 y 軸、 z 軸にとり $A(x, 0, 0), B(0, y, 0), C(0, 0, z)$

$$\text{とすると、} \begin{cases} y^2+z^2 = a^2 \\ z^2+x^2 = b^2 \\ x^2+y^2 = c^2 \end{cases} \text{ より } OD^2 = x^2+y^2+z^2 = \frac{(a^2+b^2+c^2)}{2} \quad (図略)$$

$$\therefore OD = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}} \quad (32\text{頁 問題9-2})$$

$$\triangle ABC \text{ は鋭角三角形だから、} a^2 \sim b^2 < c^2 < a^2 + b^2, 16 < c^2 < 34 \text{ で } 4 < c < \sqrt{34}$$

18. a, b, c, d が正の数するとき、次の不等式を証明せよ。

$$\sqrt{a+b+c+d} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}}{2} \quad (大阪外大)$$

$$(略証) \quad (\sqrt{a+b})^2 - \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{2}}\right)^2 = a+b - \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{2} = \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{2}}\right)^2 \geq 0$$

$$\therefore \sqrt{a+b} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{2}}, \quad \sqrt{c+d} \geq \frac{\sqrt{c} + \sqrt{d}}{\sqrt{2}} \text{ だから} \quad (36\text{頁 例7})$$

$$\sqrt{a+b+c+d} \geq \frac{\sqrt{a+b} + \sqrt{c+d}}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{c} + \sqrt{d}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}}{2}$$

19. $a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$ のとき次の 2 つの数の大小を判定せよ。

$$a+b+c, \sqrt{bc-b-c+1} + \sqrt{ca-c-a+1} + \sqrt{ab-a-b+1} + 3 \quad (大阪女子大)$$

$$(略証) \quad 2(a+b+c-3) = \{(b-1)+(c-1)\} + \{(c-1)+(a-1)\} + \{(a-1)+(b-1)\}$$

$$\geq 2\sqrt{(b-1)(c-1)} + 2\sqrt{(c-1)(a-1)} + 2\sqrt{(a-1)(b-1)}$$

$$\therefore a+b+c \geq \sqrt{bc-b-c+1} + \sqrt{ca-c-a+1} + \sqrt{ab-a-b+1} + 3 \quad (37\text{頁 問題10-8})$$

20. $a+b+c > 0, ab+bc+ca = 1$ のとき、不等式 $a+b+c \geq \sqrt{3}$ を証明せよ。 (小樽商大)

$$(略証) \quad (a+b+c)^2 - 3 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)-3(ab+bc+ca) = \{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}/2 \geq 0$$

$$\text{より、} a+b+c \geq \sqrt{3} \quad (37\text{頁 問題10-10})$$