数学散歩　ＸＶ-3　　　　　　　　２０２１．２．　α　　岐阜市　村山鐔司

「科学新興社 ﾓﾉｸﾞﾗﾌ ２．不等式 矢野健太郎 監修 飯尾和義 著」 3/4

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

〖今日の課題〗　次の４つの数の大小の順を示し、その理由を明らかにせよ。

$\dfrac{7}{9}$ 、 $\sqrt{14}-3$ 、 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ 、 $\log_{10}6$　　(京都大)(解答は後掲)

＜問題、略解、解説など＞

２１．a、b、c が正の数で、a+b+c = 1 のとき、次のものを求めよ。

⑴ $a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca$ を満足する a、b、c の値

⑵ $a^2+b^2+c^2$ の最小値　⑶ ab+bc+ca の最大値　　(早稲田大)

(略解) ⑴ $(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca) = \{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}/2 = 0$ より a=b=c= 1/3

⑵ $3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2 = 2\{(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)\} = \{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \geqq 0$

∴ $3(a^2+b^2+c^2)-1 \geqq 0$　最小値は 1/3　　(38頁 問題１０-11)

⑶ $6(ab+bc+ca) = 2(a+b+c)^2 - \{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \leqq 2$ 。 最大値は 1/3

２２．a、b、c が相異なる正の数のとき、次の式の大小を定めよ。

⑴ $\dfrac{a+b}{2}$ 、 $\dfrac{2ab}{a+b}$ 、 $\sqrt{ab}$ 、 $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$　　(工学院大)

⑵ $\dfrac{a+b+c}{3}$ 、 $\sqrt[3]{abc}$ 、 $\dfrac{1}{\{(1/a)+(1/b)+(1/c)\}/3}$　　(奈良女子大)

⑶ $\sqrt{\dfrac{a+b+c}{3}}$ 、 $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3}$　　(東京電機大)

(49頁 問題１２-1)

(略証) ⑴ $\dfrac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2} < \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$　(証明略)

⑵ $\dfrac{1}{\{(1/a)+(1/b)+(1/c)\}/3} < \sqrt[3]{abc} < \dfrac{a+b+c}{3}$　(証明略)　$A^3+B^3+C^3-3ABC=$ …　逆数を利用すると …

⑶ $\left(\sqrt{\dfrac{a+b+c}{3}}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3}\right)^2 = \dfrac{3(a+b+c)-(a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ca})}{9}$

$= \dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2+(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{9} > 0$　∴ $\sqrt{\dfrac{a+b+c}{3}} > \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3}$

２３．次の式の大小を比べよ。(本にはないが、問題に「a、b を正数として、」を追加する。)

$\dfrac{a+b}{2}$ 、 $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ 、 $\sqrt[3]{\dfrac{a^3+b^3}{2}}$　　(明治大)

「・・・比べよ。」とあり、数値を入れ比べてみた。

((参考) a=1、b=-1 とすると 0、1、0 となる。)

a=1、b=3 として $\dfrac{a+b}{2} = 2$ 、 $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} = \sqrt{5} = 2.236\cdots$　$\sqrt[3]{\dfrac{a^3+b^3}{2}} = \sqrt[3]{14}$

$(\sqrt{5})^6 = 125$ 、$(\sqrt[3]{14})^6 = 196$ だから　$\dfrac{a+b}{2} \leqq \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \leqq \sqrt[3]{\dfrac{a^3+b^3}{2}}$　(＊)

(略証) $\left(\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\right)^2 - \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2-2ab+b^2}{4} = \dfrac{(a-b)^2}{4} \geqq 0$ ・・・①

$\left(\sqrt[3]{\dfrac{a^3+b^3}{2}}\right)^6 - \left(\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\right)^6 = \left(\dfrac{a^3+b^3}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a^2+b^2}{2}\right)^3$

$= \dfrac{a^6+2a^3b^3+b^6}{4} - \dfrac{a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6}{8} = \dfrac{a^6-3a^4b^2+4a^3b^3-3a^2b^4+b^6}{8}$　　(50頁 問題１２-4)

$= \dfrac{(a-b)^2(a^4+2a^3b+2ab^3+b^4)}{8} \geqq 0$ ・・・②　　①、②より (＊) が成立

２４．⑴ a、b、m、n が正の数で、m+n = 1 のとき、次の不等式を証明せよ。

$\sqrt{ma+nb} \geqq m\sqrt{a}+n\sqrt{b}$

⑵ a、b、c、p、q、r が正の数で、p+q+r = 1 のとき、次の不等式を証明せよ。

$\sqrt{pa+qb+rc} \geqq p\sqrt{a}+q\sqrt{b}+r\sqrt{c}$　　(東京教育大)

(略証) ⑴ $(\sqrt{ma+nb})^2 - (m\sqrt{a}+n\sqrt{b})^2 = ma+nb-(m^2a+2mn\sqrt{a}\sqrt{b}+n^2b)$

$= m(1-m)a - 2mn\sqrt{a}\sqrt{b} + n(1-n)b = mna - 2mn\sqrt{a}\sqrt{b} + nmb$

$= mn(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq 0$　∴ $\sqrt{ma+nb} \geqq m\sqrt{a}+n\sqrt{b}$　(ｸﾞﾗﾌ の利用も)

⑵ (⑴と同様にできるが、ここでは⑴を利用して) ⑴から

$$\sqrt{pa+qb+rc} = \sqrt{(p+q)\left(\frac{pa}{p+q}+\frac{qb}{p+q}\right)+rc} \geqq (p+q)\sqrt{\frac{pa}{p+q}+\frac{qb}{p+q}} + r\sqrt{c}$$

$$\geqq (p+q)\left(\frac{p}{p+q}\sqrt{a}+\frac{q}{p+q}\sqrt{b}\right) + r\sqrt{c} = p\sqrt{a}+q\sqrt{b}+r\sqrt{c}$$

$\therefore\quad \sqrt{pa+qb+rc} \geqq p\sqrt{a}+q\sqrt{b}+r\sqrt{c}$　　（61頁 例８）

２５．$1 < a < b$ のとき、次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{b^4-1}{a^4-1} < \frac{b}{a}\cdot\frac{b^3-1}{a^3-1} < \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{b^2-1}{a^2-1}$$

（福井大）

（参考）本では $x > 1$ のときの、$f(x) = \dfrac{x^4-1}{x(x^3-1)}$、$g(x) = \dfrac{x^3-1}{x(x^2-1)}$ のグラフを利用。

（略証）$a^4-1 = (a-1)(a+1)(a^2+1)$、$a^3-1 = (a-1)(a^2+a+1)$、$a^2-1 = (a-1)(a+1)$、

b についても同様で、問題の不等式の３つの項をを、$(b-1)/(a-1) > 0$ で割る。

$$\frac{(b+1)(b^2+1)}{(a+1)(a^2+1)} < \frac{b}{a}\cdot\frac{b^2+b+1}{a^2+a+1} < \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{b+1}{a+1}$$

⑴　$\dfrac{(b+1)(b^2+1)}{(a+1)(a^2+1)} < \dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{b^2+b+1}{a^2+a+1}$　について

$b(b^2+b+1)\ (a+1)(a^2+1) - a(a^2+a+1)\ (b+1)(b^2+1)$

$= (b^3+b^2+b)\ (a^3+a^2+a+1) - (a^3+a^2+a)\ (b^3+b^2+b+1)$

$= (b^3+b^2+b) - (a^3+a^2+a)$

$= (b-a)(a^2+ab+b^2+a+b+1) > 0$

⑵　$\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{b^2+b+1}{a^2+a+1} < \dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{b+1}{a+1}$　について

$b^2(b+1)\ a\ (a^2+a+1) - a^2(a+1)\ b\ (b^2+b+1)$

$= (b^3+b^2)(a^3+a^2+a) - (a^3+a^2)(b^3+b^2+b)$

$= (b^3+b^2)a - (a^3+a^2)b$

$= (b-a)ab(a+b+1) > 0$　　⑴、⑵より成立　　（64頁 問題１４-13）

２６．$\pi/2 > x \geqq y \geqq 0$ のとき、$x-y$、$\sin x-\sin y$、$\tan x-\tan y$ の大小を比べよ。（名古屋大）

（略解）$x=y$ のとき、３つとも 0 で等しい。

$x \neq y$ のとき、$(\sin x)' = \cos x$、$(\tan x)' = 1/(\cos x)^2$ より、平均値の定理から

$\dfrac{\sin x-\sin y}{x-y} = \cos u$　　$x>u>y\geqq 0$ となる u が存在 $(0<\cos u<1)$　　$\therefore\ \sin x-\sin y < x-y$

$\dfrac{\tan x-\tan y}{x-y} = \dfrac{1}{\cos^2 v}$　　$x>v>y\geqq 0$ となる v が存在 $(0<\cos v<1)$　　$\therefore\ \tan x-\tan y > x-y$

以上まとめて　$\sin x-\sin y \leqq x-y \leqq \tan x-\tan y$　　（64頁 問題１４-16）

２７．n が正の整数で、$n \geqq 2$ のとき、次の不等式を証明せよ。

$$1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2} < \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} < 2-\frac{1}{n}$$

（立教大）

（略証）$f(x) = 1/x^2\ (x>0)$ は減少関数だから、k を正整数として、$\dfrac{1}{k^2} < \displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{x^2} < \frac{1}{(k-1)^2}$

$\displaystyle\int_1^n \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n = 1-\frac{1}{n}$　だから、$k=2,3,\cdots,n$ について加える。

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} < 1-\frac{1}{n} < \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}$$

⑴　右の $<$ の左右に $\dfrac{1}{n^2}$ を加えて　$1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$

⑵　左の $<$ の左右に $1 = \dfrac{1}{1^2}$ を加えて　$\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2} < 2-\dfrac{1}{n}$

⑴、⑵より成立。　　（66頁 例２）

「今日の課題」の解の概略

$\dfrac{7}{9} = 0.777\cdots$、$\sqrt{14}-3 = 0.741\cdots$、$(0.7)^3 = 0.343\cdots$、$\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^3 = 0.333\cdots$

$6^9 = 10077696 > 10^7$　より　$6 > 10^{7/9}$　　$\log_{10}6 > \dfrac{7}{9} = 0.777\cdots$

まとめて　$\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} < \sqrt{14}-3 < \dfrac{7}{9} < \log_{10}6$

（56頁 問題１３-18）