数学散歩　ＸⅤ-4　　　　　　　　２０２１．２．　β　　岐阜市　村山錞司

「科学新興社 ﾓﾉｸﾞﾗﾌ ２．不等式 矢野健太郎 監修 飯尾和義 著」　4/4

この本については、最後の紹介になります。いろいろ風変わりな問題もあり楽しめました。本の解答とは全く異なる私の勝手な解釈によるものもあり、間違いなどありえます。点検をよろしく。

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

〖今日の課題〗　前回の問題２７を参考に、$f(x) = 1/\sqrt{x}$ のグラフを利用して、　(解答は後掲)

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}$$ の整数部分を求めよ。

＜問題、略解、解説など＞

２８．$a>0$、$b>2$ のとき、$\displaystyle\int_0^a (x^2+2)\,dx + \int_2^b \sqrt{x-2}\,dx \geqq ab$ であることを示せ。

(参考　本ではグラフを利用した証明 (説明))　　(三重大)

(略証)　(左辺) − (右辺) $= \left[\dfrac{x^3}{3} + 2x\right]_0^a + \dfrac{2}{3}\left[(x-2)^{3/2}\right]_2^b - ab$

$= \dfrac{a^3}{3} + 2a + \dfrac{2}{3}(b-2)\sqrt{b-2} - ab$　　($c = \sqrt{b-2}$ とおく)

$= \dfrac{a^3 - 3ac^2 + 2c^3}{3} = \dfrac{(a-c)^2(a+2c)}{3} \geqq 0$　　よって成立。

($y=x^2+2$ と $x=\sqrt{y-2}$ の２つのグラフとの関係は？)　　(71頁 問題１５-13)

２９．$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ のとき、x^2、y^2、z^2 はすべて 1 以下かまたは 1 以上であることを証明せよ。

(略証)　与えられた式を z について整理すると $z^2 + 2xyz + x^2 + y^2 - 1 = 0$

z は実数だから (判別式)$D/4 = (xy)^2 - (x^2 + y^2 - 1) = (x^2 - 1)(y^2 - 1) \geqq 0$

同様にして、$(y^2 - 1)(z^2 - 1) \geqq 0$　、$(z^2 - 1)(x^2 - 1) \geqq 0$　　(76頁 例８)

以上から、$x^2 \geqq 1$ かつ $y^2 \geqq 1$ かつ $z^2 \geqq 1$ かまたは $x^2 \leqq 1$ かつ $y^2 \leqq 1$ かつ $z^2 \leqq 1$

３０．x、y、z はどれも 1 より小さい正の数で、それらの和が 2 のとき、次の不等式が成り立つことを証明せよ。 $1 < xy + yz + zx \leqq \dfrac{4}{3}$　　(福井大)

(略証)　$0 < x、y、z < 1$、$x + y + z = 2$

$0 < (1-x)(1-y)(1-z) = 1 - (x+y+z) + (xy+yz+zx) - xyz = -1 + (xy+yz+zx) - xyz$

∴　$xy+yz+zx > xyz + 1 > 1$ …①

$4 - 3(xy+yz+zx) = (x+y+z)^2 - 3(xy+yz+zx) = \{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\}/2 \geqq 0$

よって　$xy + yz + zx \leqq \dfrac{4}{3}$　…②　　①、②より成立

(77頁 例１０)

３１．$f(x) = x^2 + ax + b$ のとき、$|f(1)|$、$|f(2)|$、$|f(3)|$ のうち少なくとも 1 つは 1/2 以上のものがあることを証明せよ。

(略証)　3 つとも 1/2 未満とすると、　(78頁 例１２)

$-\dfrac{1}{2} < a+b+1 < \dfrac{1}{2}$ …①　$-\dfrac{1}{2} < 2a+b+4 < \dfrac{1}{2}$ …②　$-\dfrac{1}{2} < 3a+b+9 < \dfrac{1}{2}$ …③

②-①より　$-\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} < a+3 < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}$　　よって、$-4 < a < -2$

③-②より　$-\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} < a+5 < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}$　　よって、$-6 < a < -4$

ともに満たす a はない。3 つのうち少なくとも 1 つは 1/2 以上でなければならない。

３２．A、B、C、D はどれも 0 と π との間にあるとする。次の不等式が成り立つことを証明せよ。

⑴　$\sin A + \sin B + \sin C + \sin D \leqq 4 \sin\dfrac{1}{4}(A + B + C + D)$

⑵　$\sin A + \sin B + \sin C \leqq 3 \sin\dfrac{1}{3}(A + B + C)$　　(電通大)

(略証)⑴　$\sin A+\sin B+\sin C+\sin D = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} + 2\sin\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2}$

$\leqq 2\sin\dfrac{A+B}{2} + 2\sin\dfrac{C+D}{2} \leqq 4\sin\dfrac{A+B+C+D}{4}\cos\dfrac{A+B-C-D}{4}$

$\leqq 4\sin\dfrac{A+B+C+D}{4}$

⑵　$D = \dfrac{A+B+C}{3}$ とすれば D も 0 と π との間にある。⑴より、

$\sin A+\sin B+\sin C+\sin\dfrac{A+B+C}{3} \leqq 4\sin\dfrac{1}{4}\left(A+B+C + \dfrac{A+B+C}{3}\right) = 4\sin\dfrac{A+B+C}{3}$

∴ $\sin A+\sin B+\sin C \leqq 3\sin\dfrac{A+B+C}{3}$ （79頁 問題１６-11）

３３．$a>b>c>d>0$ のとき、平面上の点 A(a,0)、B(b,0)、C(c,0)、D(0,d)、O(0,0) について $\angle ADO+\angle BDO+\angle CDO \geqq 180^\circ$ ならば $abc \geqq (a+b+c)d^2$ であることを証明せよ。（東京教育大）

（略証） $\angle ADO=\alpha$、$\angle BDO=\beta$、$\angle CDO=\gamma$ とおくと、$0<\gamma<\beta<\alpha<90^\circ$、$180^\circ \leqq \alpha+\beta+\gamma<270^\circ$ より $\tan\alpha$、$\tan\beta$、$\tan\gamma$ は正数、$0\leqq\tan(\alpha+\beta+\gamma)$。

$a=d\tan\alpha$、$b=d\tan\beta$、$c=d\tan\gamma$。また、$a>b>c>d>0$ より $\tan\alpha>\tan\beta>\tan\gamma>1$

$abc-(a+b+c)d^2 = \{(\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma)-(\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma)\}d^3$ ・・・(*)

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha} \geqq 0$$

$\tan\alpha>\tan\beta>\tan\gamma>1$ だから 分母<0 で、分子$\leqq 0$ だから

(*) より $abc-(a+b+c)d^2 \geqq 0$ ∴ $abc \geqq (a+b+c)d^2$ （図略） （79頁 問題１６-12）

３４．a、b、c は実数で、$b^2<ac$ のとき次の⑴、⑵を証明せよ。
⑴ $a^3+2ab+c$ は a と同符号である。 ⑵ $a^3+b^3+c^3$ は a と同符号である。 （札幌医大）

（略証） ⑴ $a(a^3+2ab+c) = a^4+2a^2b+ac > a^4+2a^2b+b^2 = (a^2+b)^2 \geqq 0$

$a(a^3+2ab+c) > 0$ だから a と $a^3+2ab+c$ は同符号。

⑵ $a^3(a^3+b^3+c^3) = a^6+a^3b^3+a^3c^3 > a^6+a^3b^3+b^6 = \{(a^6+b^6)+(a^3+b^3)^2\}/2 \geqq 0$

$a^3(a^3+b^3+c^3) > 0$ で $a^2>0$ だから、a と $a^3+b^3+c^3$ は同符号。（80頁 問題１６-13）

３５．$a\geqq b\geqq c$、$x\geqq y\geqq z$、$x+y+z=0$ ならば $ax+by+cz\geqq 0$ であることを証明せよ。 （名古屋大）

（略証） $x+y+z=0$ より $y=-x-z$ だから、$ax+by+cz=(a-b)x+(c-b)z$ …(*)

$a\geqq b\geqq c$ より、$a-b\geqq 0$、$c-b\leqq 0$ 。 また、$x\geqq y\geqq z$ より、$3x\geqq x+y+z=0$ で $x\geqq 0$、同様に $z\leqq 0$ 。

∴ $(a-b)x\geqq 0$、$(c-b)z\geqq 0$ (*) より $ax+by+cz\geqq 0$ （80頁 問題１６-14）

３６．$a\geqq 2$、$b\geqq 2$、$c\geqq 2$、$d\geqq 2$ のとき、$abcd>a+b+c+d$ であることを示せ。 （名古屋大）

（略証） $a-1\geqq 1$、$b-1\geqq 1$、$c-1\geqq 1$、$d-1\geqq 1$ だから、$(a-1)(b-1)=ab-a-b+1\geqq 1$より $ab\geqq a+b$、
同様に $ac\geqq a+c$、$ad\geqq a+d$、…、$cd\geqq c+d$ 。よって $abcd\geqq(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd>a+b+c+d$

（80頁 問題１６-18）

３７．x、y、z が正の数のとき、$xyz\geqq(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$ を証明せよ。 （東京工大）

（略証） $(x+y-z)(y+z-x)=\{y+(x-z)\}\{y-(x-z)\}=y^2-(x-z)^2\leqq y^2$ …①

同様に、 $(y+z-x)(z+x-y)=z^2-(y-x)^2\leqq z^2$ …② $(x+y-z)(z+x-y)=x^2-(y-z)^2\leqq x^2$ …③

①×②×③から $\{(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)\}^2\leqq(xyz)^2$ ここで、x、y、z は正の数で $xyz>0$

［ $x+y-z$、$y+z-x$、$z+x-y$ の 3 つの積について、
（例として、x = 10、y = 1、z = 2 の場合、$\{9\cdot(-7)\cdot 11\}^2 > (10\cdot 1\cdot 2)^2$ ）
(ｲ) 2 つが正（または 0 以上）で 1 つが負（または 0 以下）の場合、3 つの積は負（または 0 以下）で問題の不等式は $xyz>0$ だから成立。（ $9\cdot(-7)\cdot 11<10\cdot 1\cdot 2$ ）
(ﾛ) 例えば、$(x+y-z)+(y+z-x)=2y>0$ だから、2 つがともに負となることはない。］

∴ $xyz\geqq(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$ （80頁 問題１６-15）

３８．n が $n>2$ の自然数のとき、$(n!)^2 > n^n$ であることを証明せよ。

（略証） $n! = 1\cdot 2\cdot\cdots\cdot \underline{k}\cdot\cdots\cdot n = n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot\underline{(n-k+1)}\cdot\cdots\cdot 1$

k 番目の 2 項の積と n との差は、

$k\cdot(n-k+1)-n = (n-k)(k-1) \geqq 0$ （等号は n=k か k=1 のときのみ成立）

∴ $(n!)^2 = \{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot k\cdot\cdots\cdot n\}\cdot\{n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)\cdot\cdots\cdot 1\}$

$= (1\cdot n)\cdot\{2\cdot(n-1)\}\cdot\cdots\cdot\{k\cdot(n-k+1)\}\cdot\cdots\cdot(n\cdot 1) > n\cdot n\cdot\cdots\cdot n = n^n$

よって、 $(n!)^2 > n^n$ （80頁 問題１６-23）

[今日の課題]
の解の概略 $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{10000}}$ の整数部分を求めよ。

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ は減少関数だから、k を正整数として $\dfrac{1}{\sqrt{k}} < \displaystyle\int_{k-1}^{k}\dfrac{dx}{\sqrt{x}} < \dfrac{1}{\sqrt{k-1}}$ …（*）

$\displaystyle\int_{k-1}^{k}\dfrac{dx}{\sqrt{x}} < \left[2\sqrt{x}\right]_{k-1}^{k} = 2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$ k = 2 から k = 10000 まで加えて

（*）の中央項は、 $2\{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{10000}-\sqrt{9999})\} = 2(100-1) = 198$

で、不等式全体は、 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{10000}} < 198 < 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{9999}}$

$1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{10000}}<199$ 、 $\underline{198}+\dfrac{1}{100} < 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{10000}}$

だから、求める整数部分は $\underline{198}$ （71頁 問題１５-5）