「新作数学問題ゼミ 大学入試新傾向創作問題100選 石谷茂 著　現代数学社」
（1976年 4月20日 新装版 1 刷発行）　3/3
ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜問題、略解、解説など＞

６１　α、βは複素数であって、$\alpha+\beta=1$、$\alpha\beta=1$ である。2 つの自然数 m、n が $\alpha^m+\beta^m=\alpha^n+\beta^n$ を満たせば m^2-n^2 は 6 の倍数であることを証明せよ。

（略証）　$\alpha+\beta=1$、$\alpha\beta=1$ より、α、βは $x^2-x+1=0$ の 2 根。

$$x=\frac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}$$

$\alpha=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$、$\beta=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$　とおく。

$$\alpha^m+\beta^m=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^m+\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)^m=2\cos\frac{m\pi}{3}$$

同様に　$\alpha^n+\beta^n=2\cos\frac{n\pi}{3}$　∴　$\cos\frac{m\pi}{3}=\cos\frac{n\pi}{3}$　から　$\frac{m\pi}{3}=2k\pi\pm\frac{n\pi}{3}$

$m=6k\pm n$、$m+n=6k$ または $m-n=6k$　　$m^2-n^2=(m+n)(m-n)$ は 6 の倍数である。

６８　$a(a-2)+b^2=0$ $(a\neq 0)$ を満たすどんな複素数 a+bi も $a+bi=\dfrac{2}{1-ci}$（c は実数）と表されることを証明せよ。

（略証）　$a^2+b^2=2a$ だから $(a+bi)(a-bi)=2a$

$$a+bi=\frac{2a}{a-bi}=\frac{2}{1-\frac{b}{a}i}=\frac{2}{1-ci}$$

$a\neq 0$ より $\frac{b}{a}=c$　とすればよい。

７４　$f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$（a、b、c、d は実数で $ad-bc\neq 0$）について
t についての方程式 $t=f(t)$ が、異なる 2 根 α、β をもつとき、次を証明せよ。
⑴　$f'(\alpha)\cdot f'(\beta)$ は一定である。　⑵　$|f'(\alpha)|<1$ ならば $|f'(\beta)|>1$ である。

（略証）⑴　$t(ct+d)=at+b$ より $ct^2-(a-d)t-b=0$　異なる 2 根 α、βをもつから
$c\neq 0$、$\alpha+\beta=(a-d)/c$、$\alpha\beta=-b/c$　また、$f'(x)=\dfrac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2}=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

$$f'(\alpha)\cdot f'(\beta)=\frac{(ad-bc)^2}{(c\alpha+d)^2\ (c\beta+d)^2}\quad\left(\begin{aligned}&(c\alpha+d)(c\beta+d)=c^2\alpha\beta+cd(\alpha+\beta)+d^2\\&=c^2(-b/c)+cd\{(a-d)/c\}+d^2=ad-bc\end{aligned}\right)$$

$=(ad-bc)^2/(ad-bc)^2=1$　よって一定

⑵　⑴より、$|f'(\alpha)||f'(\beta)|=1$ だから $|f'(\alpha)|<1$ ならば $|f'(\beta)|>1$ である。

７８　曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ の接線が x 軸、y 軸とまじわる点を A、B とするとき、線分 AB 長さの最小値とそのときの接点を求めよ。

（略解）　曲線は $y=(1-\sqrt{x})^2$、$y'=1-1/\sqrt{x}$
接点を $(a,(1-\sqrt{a})^2)$ $(0<a<1)$ とすると、　接線は $y=(1-(1/\sqrt{a}))(x-a)+(1-\sqrt{a})^2$
x 軸、y 軸との交点 A、B は　$A(\sqrt{a},0)$、$B(0,1-\sqrt{a})$
$AB^2=a+(1-\sqrt{a})^2=2(\sqrt{a}-(1/2))^2+(1/2)\geqq 1/2$
$a=\frac{1}{4}$ のとき接点は、$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$　線分 AB の最小値は $\frac{1}{\sqrt{2}}$

８０　どんな 2 次関数 F(x) に対しても、$\int_{-1}^{1}F(x)G(x)dx=0$　であるような 3 次関数 G(x) を求めよ。

（略解）　$F(x)=px^2+qx+r$（p、q、r は任意の実数）、$G(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$
とする。　$\int_{-1}^{1}x^{2n+1}dx=0$　だから　x^{2n} だけ残して

$$\int_{-1}^{1}F(x)G(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(px^2+qx+r)(ax^3+bx^2+cx+d)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(px^2+qx+r)(ax^3+bx^2+cx+d)dx=\int_{-1}^{1}\{p(bx^4+dx^2)+q(ax^4+cx^2)+r(bx^2+d)\}dx$$

$= 2\{p\left(\frac{b}{5}+\frac{d}{3}\right)+q\left(\frac{a}{5}+\frac{c}{3}\right)+r\left(\frac{b}{3}+d\right)\} = 0$

p、q、r は任意だから、$\frac{b}{5}+\frac{d}{3}=0$ 、$\frac{a}{5}+\frac{c}{3}=0$ 、$\frac{b}{3}+d=0$

より、$b=d=0$ 、$c=-\frac{3}{5}a$ ∴ $G(x)=ax^3-\frac{3}{5}ax = a(x^3-\frac{3}{5}x)$ $(a \neq 0)$

８８　$f(x)$、$g(x)$ は区間［0,1］で連続な関数で、恒等的に 0 でないとする。次の問に答えよ。

⑴　任意の実数 t に対して、次の不等式を証明せよ。

$$t^2\int_0^1 \{f(x)\}^2\,dx + 1 \geqq 2t\int_0^1 f(x)\,dx$$

⑵　次の不等式を満たす定数 k の最小値を求めよ。

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 + \left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)^2 \leqq k\left(\int_0^1 (\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2)\,dx\right)$$

（略解）⑴　（左辺）－（右辺）$=\int_0^1 \{tf(x)-1\}^2 \geqq 0$　より成立

⑵　⑴より、t について次の 2 次不等式が常に成立するから、

$$t^2\int_0^1 \{f(x)\}^2\,dx - 2t\int_0^1 f(x)\,dx + 1 \geqq 0$$

（判別式）$\frac{D}{4} = \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 - \int_0^1 \{f(x)\}^2\,dx \leqq 0$

∴　$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \leqq \int_0^1 \{f(x)\}^2\,dx$ …①

同様に　$\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)^2 \leqq \int_0^1 \{g(x)\}^2\,dx$ …②

①+②から $\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 + \left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)^2 \leqq \left(\int_0^1 (\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2)\,dx\right)$

よって k の最小値は 1

＜コーシー・シュワルツの（積分）不等式＞

a＜b のとき $\int_a^b (f(x))^2\,dx\int_a^b (g(x))^2\,dx \geqq \left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2$

（略証）a＜b より

$\int_a^b (t(f(x)-g(x))^2\,dx$

$$= t^2\int_a^b \{f(x)\}^2 dx - 2t\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b \{g(x)\}^2 dx \geqq 0$$

この 2 次不等式が任意の t について成り立つから

（判別式）$\frac{D}{4} = \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - \int_a^b \{f(x)\}^2 dx\int_a^b \{g(x)\}^2 dx \leqq 0$

∴　$\int_a^b \{f(x)\}^2 dx\int_a^b \{g(x)\}^2 dx \geqq \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2$　$(a < b)$

（例として）

８９　次の不等式を証明せよ。

⑴　$\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx \leqq \frac{\sqrt{30}}{5}$　　⑵　$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\,dx \leqq 1$

$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2 \leqq \int_a^b \{f(x)\}^2\,dx$　$(a < b)$　を利用

（略証）⑴　$\left(\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx\right)^2 \leqq \int_0^1 (1+x^4)\,dx = \left[x+\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{6}{5}$

∴　$\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx \leqq \frac{\sqrt{30}}{5}$

⑵　$\left(\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\,dx\right)^2 \leqq \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi/2} = 1$

∴　$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\,dx \leqq 1$