数学散歩　ＸⅥ-4　　　　　　　　　２０２１．４．　α　　岐阜市　村山錞司

「BLUE BACKS 傑作！ 数学パズル50 名問・良問の宝庫へようこそ 小泓正直」

本館 BC 410.7 コ 本館 YA 410.7 コ

この本については、過去に「数学散歩　ＶⅡ- 寄り道 2017.5.χ」でも少し扱っています。
重複する部分もありますが、前のも参考にしてください。お付き合いをよろしく。
ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

---＜問題、略解、解説など＞---

4　ギブミーまんじゅう！

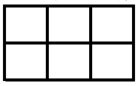
まんじゅうが 10 個ある。A、B、C、D、E の 5 人に最低でも 1 個は与えるとする。与え方は全部で何通りあるか。① 126 通り　② 210 通り　③ 3125 通り　④ 30240 通り

（私の解）まず、5 人に 1 個ずつ与えて、残り 5 個は個数を決めないで、5 人に分ける。

$_5H_5 = {}_{5+5-1}C_5 = {}_9C_5 = 126$（通り）

（本から） 10 個の○を 1 列に並べ、その 9 つの間＿に仕切り「｜」を 4 個入れて 5 分割し、5 人に配ればよい。　○＿○｜○＿○＿○｜○｜○｜○＿○＿○　$_9C_4 = 126$（通り）

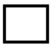
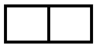
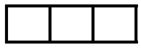
7　四角形の数

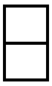
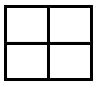
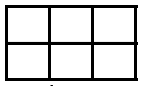


図の中に全部でいくつの四角形が隠れているか。

（私の解）　横線 3 本から 2 本、縦線 4 本から 2 本とって四角形を作ればよいから

$_3C_2 \times {}_4C_2 = 3 \cdot 6 = 18$ 個

（本では）　数え上げで　1×1  6 個、2×1  4 個、3×1  2 個、

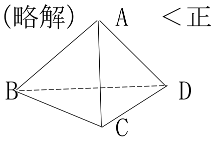
1×2  3 個、2×2  2 個、3×2  1 個

6+4+2+3+2+1 = 18 を示し、その後で　$_{3+1}C_2 \times {}_{2+1}C_2 = 18$ 個

３０　正多面体の塗り分け

正多面体の各面を、面の数と同じ数の異なる色で塗り分ける。正４面体は 4 色を使ってどんなに工夫しても、たったの 2 通りしかできない。立方体については、6 色で塗り分けた場合何通りあるか。　① 15 通り　② 30 通り　③ 60 通り　④ 120 通り

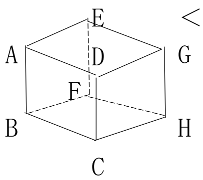
（略解）



＜正４面体＞

1 面（△ABC)をどれか 1 色で塗り、側面の 3 面を残りの 3 色で塗る。

回転しても同じだから円順列で塗り方は　$\dfrac{3!}{3} = 2$　通り



＜立方体＞

1 面（□ABCD)をどれか 1 色で塗り、側面の 4 面を残りの 5 色で塗り、回転しても同じだから塗り方は円順列で、残りの 1 面は残りの 1 色で塗る。

$\dfrac{_5P_4}{4} = 30$　通り　で　②

（別解として）対面（□EFGH)を先に塗り（5 通り）
側面は円順列で 3！= 6 通りで　②　30 通り

（参考）　正８面体 $\dfrac{7!}{3} = 1680$ （F_8）　正１２面体 $\dfrac{11!}{5} = \cdots$ （F_{12}）　正２０面体 $\dfrac{19!}{3} = \cdots$ （F_{20}）

（考え方）　①　1 面を 1 色で塗り固定

②　残りの各面を残りの色で塗る。 F_8 : 7!　F_{12} : 11!　F_{20} : 19!

③　固定した面を囲む（辺を共有する）面は

F_8 : 3 つの正三角形　F_{12} : 5 つの正５角形　F_{20} : 3 つの正三角形

固定面を中心にそれぞれ回転すれば、3、5、3 通りの同じ組み合わせが出てくるから、②をそれぞれの数で割ればよい。

３７　素数砂漠

素数砂漠（素数が存在しない区間）は最長でどのくらいになるか？

① 約１億　② 約１兆　③ 約１京　④ いくらでも長い区間が存在する

（参考：「数学散歩　Ⅶ-寄り道 2017.5.χ、ＸⅢ-1 2020.7.α」を再掲)

（略解）　n が 3 以上の自然数のとき、n！+ 2、n！+ 3、n！+ 4、・・・、n！+ n の連続する n-1 個の自然数は、それぞれ 2、3、4、…、n の倍数で素数ではない。

したがって、④　いくらでも長い区間が存在する

（例） n ＝ 5 として　　122=5!+2、123=5!+3、124=5!+4、125=5!+5

n ＝ 6 として　　722=6!+2、723=6!+3、724=6!+4、725=6!+5、726=6!+6　　・・・

４３　キリの悪い数

m、n は自然数とする。m^n ＝ ・・・0001（下 4 桁が 0001）を満たす自然数 n が必ず存在するとき、m はずばりどんな数といえるか。

① 3 以上の奇数　② 下 1 桁が 5 でない 3 以上の奇数

③ 下 1 桁が 5 でない 3 以上の素数

（略解） (ｲ)　m が偶数なら、m^n の下 1 桁も偶数になるから、m は偶数ではない。

(ﾛ)　m の下 1 桁が 5 なら、m^n の下 1 桁も 5 になり不可。

(ﾊ)　(ｲ)、(ﾛ)より m の下 1 桁は 5 でない 3 以上の奇数とする。

10000 個の数 m、m^2、m^3、・・・、m^{10000} を考える。

各項 m^k （$1 \leqq k \leqq 10000$ ）は 10000 で割り切れず、余りがある。

10000 項あって、余りは 1 ～ 9999 の 9999 通り以下しかないから、同じ余りとなる 2 項が少なくとも 1 組ある。それを　m^a、m^b（ $1 \leqq a < b < 10000$ ）とすると、

$m^b - m^a = m^a (m^{b-a} - 1)$ は 10000 で割り切れるが、m^a は割り切れず、

$m^{b-a} - 1$ は 10000 の倍数になり、m^{b-a} ＝ ・・・0001 となり題意を満たす。

ただし、m は奇数であるが素数と限定することはできない。

したがって、　② 下 1 桁が 5 でない 3 以上の奇数

（参考） m、n は自然数、m は 3 以上の奇数とし m ＝ 7、9 の場合について、電卓、Excel を使って m^n を 10000 で割った余りを少し計算してみた。

m ＝ 7 のとき

n	1	…	20	…	40	…	60	…	80	…	100	…
7^n	7	…	2001	…	4001	…	6001	…	8001	…	0001	…

m ＝ 9 のとき

n	1	…	10	…	50	…	100	…	150	…	200	…	250	…
9^n	9	…	4401	…	2001	…	4001	…	6001	…	8001	…	0001	…

＜余白を利用して＞　過去に紹介した「数学散歩　ＶⅡ－ 寄り道 2017.5.χ」の記事から

＜参考＞ 次に紹介する本に、「素数が無限にある」のサイザックによる証明（2006年に発表され、大激震走る。）が載っていましたので紹介します。

「ほんとうに使える数学（基礎編）　芹沢光雄　実業の日本社」

＜準備として＞

２以上の任意の自然数 m に対し、m と $m+1$ は互いに素、すなわち 1 以外の公約数はない。

（証）m と $m+1$ が 2 以上の公約数 a をもつならば、$m = ab$、$m+1 = ac$ $(b<c)$ となる b、c がある。よって　$1 = (m+1) - m = a(c - b) \geqq a$ で矛盾。

＜本題のサイザックによる証明＞

n を 2 以上の自然数とすると、n を割る素数 p_1 がある。次に、n と $n+1$ は互いに素だから、$n+1$ を割る 素数 p_2 は n を割る素数 p_1 とは異なる。

次に、$n(n+1)$ と $n(n+1)+1$ は互いに素だから、　$n(n+1)+1$ を割る 素数 p_3 は $n(n+1)$ を割る素数 p_1、p_2 とは異なる。　次に、$\{n(n+1)\}\{n(n+1)+1\}$ と $\{n(n+1)\}\{n(n+1)+1\}+1$ は互いに素だから、　$\{n(n+1)\}\{n(n+1)+1\}+1$ を割る素数 p_4 は　$\{n(n+1)\}\{n(n+1)+1\}$ を割る素数 p_1、p_2、p_3 とは異なる。以下、同様に続けることができるので、素数は無限個存在する。

＜追加の話題＞　ある本で、L と ℓ について

ガソリン 10 L（リットル）当たり・・・（なお、学校教育においてリットル記号 ℓ を用いることは少なくなっています。）　　とのこと。参考になれば・・・