数学散歩　ＸⅥ-5　　　　　　　　２０２１．４．　β　　岐阜市　村山錞司

「BLUE BACKS やじうま入試数学 問題に秘められた味わいのツボ 金重明」中央 BC 410 キ　(1/2)

本の「前口上」から：…選んだ問題は 29 題。…　29 はなかなか楽しい数だ。10 番目の素数で、4 で割ると 1 余るので 2^2+5^2 のように 2 つの平方数の和で表され・・なんと $2^2+3^2+4^2$ と、3 連続の平方数の和で表される最小の素数でも・・・　差が 6 である素数の組がｾｸｼｰ素数、ｾｸｼｰ 5 人娘 (5、11、17、23、29)----の長姉でもある。・・・

この本は、「数学散歩 寄り道-5 2017.10.?」でも紹介。併せて点検をよろしく。

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

━━━━＜問題、略解、解説など＞　━━━━━━━━━━━━━━━━

第３問　古代エジプトの分数

次の例のように、分数を、分子が 1 で分母は異なる幾つかの分数（単位分数）の和で表すことを考える。

（例）$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$ など、$\frac{13}{20}=\frac{1}{2}+\frac{3}{20}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{140}$、

$\frac{13}{20}=\frac{10+2+1}{20}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}$　など

次の⑴、⑵の分数について、このような表し方を 1 つ答えよ。

⑴ $\frac{13}{18}$　⑵ $\frac{3}{13}$　　（麻布中学校）

（略解）⑴　（例）の $\frac{13}{20}=\frac{10+2+1}{20}$ にならって、18 の約数 1、2、3、6、9 から分子として 1+3+9 = 13 をとり、

$\frac{13}{18}=\frac{9+3+1}{18}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$

（別解として）　$\frac{13}{18}>\frac{1}{2}$ より $\frac{13}{18}-\frac{1}{2}=\frac{4}{18}=\frac{2}{9}$　∴　$\frac{13}{18}=\frac{1}{2}+\frac{2}{9}$

$\frac{2}{9}>\frac{1}{5}$ より $\frac{2}{9}-\frac{1}{5}=\frac{1}{45}$　∴　$\frac{2}{9}=\frac{1}{5}+\frac{1}{45}$

∴　$\frac{13}{18}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{45}$

⑵　$\frac{3}{13}>\frac{1}{5}$ より $\frac{3}{13}-\frac{1}{5}=\frac{2}{65}$　∴　$\frac{3}{13}=\frac{1}{5}+\frac{2}{65}$

$\frac{2}{65}>\frac{1}{33}$ より $\frac{2}{65}-\frac{1}{33}=\frac{1}{2145}$　∴　$\frac{2}{65}=\frac{1}{33}+\frac{1}{2145}$

∴　$\frac{3}{13}=\frac{1}{5}+\frac{1}{33}+\frac{1}{45}+\frac{1}{2145}$

（本の解から）　（分母、分子を 7 倍）　$\frac{3}{13}=\frac{21}{91}=\frac{13+7+1}{91}=\frac{1}{7}+\frac{1}{13}+\frac{1}{91}$

（分母、分子を 12 倍）　$\frac{3}{13}=\frac{36}{156}=\frac{26+6+4}{156}=\frac{1}{6}+\frac{1}{26}+\frac{1}{39}$

（参考１）＜標準分解＞

$\frac{b}{a}$ を超えない最大の単位分数を $\frac{1}{n}$ とすると、$\frac{1}{n}<\frac{b}{a}<\frac{1}{n-1}$、

$\frac{b}{a}-\frac{1}{n}=\frac{bn-a}{n}$　また $\frac{b}{a}<\frac{1}{n-1}$ より　bn−b ＜ a だから bn−a ＜ b

$\frac{b}{a}=\frac{1}{n}+\frac{bn-a}{n}$　　だから分子は bn−a ＜ b で、これを続ければ有限の操作で 1 になり、単位分数の和に分解される。

（参考２）$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$　を利用すると $\frac{1}{6}=\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$

$\frac{3}{13}=\boxed{\frac{1}{6}}+\frac{1}{26}+\frac{1}{39}=\boxed{\frac{1}{7}}+\frac{1}{26}+\frac{1}{39}+\boxed{\frac{1}{42}}$

定理　分数を異なる単位分数の和に分解する方法は無数にある。

第７問　ローカルルールの押しつけ　（「寄り道-5」の再掲。より丁寧に解答）

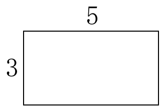
次の①から③はそれぞれある規則にもとづいて数が並んでいる。□にあてはまる数をかけ。

①　5　9　13　□　21　　②　4096　1024　256　64　□

③　3　5　8　13　21　□　55　　（お茶の水女子大学附属中学校）

（本の「答」の冒頭に）＜答＞えは無限にあるのに　（この後、いろいろ「著者の思い」が・・・）

。　（小学校の算数では）あきれる規則の数々



長方形の面積で

　5 × 3　は　　ぺけ（×）

　正解は 3 × 5

。　・・・さらにあきれる×や÷の書き順まで、・・・その他いろいろな解説（苦言？）を列挙・・・

＜予想される正答として＞

① 公差 4 の等差数列：17　　② 公比 1/4 の等比数列：16　　③ ﾌｨﾎﾞﾅｯﾁ数列：34

（参考：「数学散歩　V-3 2016.10.α」より　「Ｔｏｐｉｃ ２　整数値をとる多項式」

ラグランジュ（Lagrange）の補間公式（下記）について

$x = x_0、x_1、\cdots、x_n$ のとき、$y = y_0、y_1、\cdots、y_n$ となる x の n 次式

$$y = f(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}y_1 + \cdots$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}y_k + \cdots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}y_n$$

（例として ①）

x	0	1	2	3	4
y	5	9	13	□	21

3: □ = 20 として

$$y = f(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-3)(0-4)} \times 5 + \frac{(x-0)(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-0)(1-2)(1-3)(1-4)} \times 9$$

$$+ \frac{(x-0)(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-3)(2-4)} \times 13 + \frac{(x-0)(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-0)(3-1)(3-2)(3-4)} \times \underline{20} + \frac{(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-0)(4-1)(4-2)(4-3)} \times 21$$

$$= \frac{5(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{24} + \frac{9x(x-2)(x-3)(x-4)}{6} + \frac{13x(x-1)(x-3)(x-4)}{4}$$

$$+ \frac{20x(x-1)(x-2)(x-4)}{6} + \frac{21x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}$$

とすれば、$f(0)=5$、$f(1)=9$、$f(2)=13$、$f(3)=20$、$f(4)=21$

第９問　根性さえあれば小学生でも解ける東大の問題　（「寄り道-5」の再掲。前回と比較、点検を）

3 以上 9999 以下の奇数 a で、$a^2 - a$ が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。（東京大学）

（略解）　$a^2 - a = a(a-1)$ で a が奇数だから、$a-1$ は a より 1 小さい偶数。

$10000 = 10^4 = 2^4 \cdot 5^4$　　$2^4 = 16$、$5^4 = 625$

a が奇数で、$a(a-1)$ が 10000 で割り切れるから $a = 625\,m$（m は奇数）、$a - 1 = 16\,n$

$3 \leqq 625\,m \leqq 9999$ より $1 \leqq m \leqq 15.99\cdots$　m 奇数だから $m = 1, 3, \cdots, 13, 15$　…（*）

ここで $625 = 16\times39 + 1$ だから $a - 1 = 625\,m - 1 = 16\times39\,m + m - 1 = 16\,n$

（*）で $m-1$ が 16 の倍数になるのは $m = 1$ のときのみ、$a = 625$ で $a^2 - a = 390000$ となる。

第１３問　フェルマーの大定理もどき

次を証明せよ。

⑴　任意の自然数 a に対し、a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 である。

⑵　自然数 a、b、c が $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たすと仮定すると、a、b、c はすべて 3 で割りり切れなければならない。

⑶　$a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たす自然数 a、b、c は存在しない。　（九州大学）

（参考）＜フェルマーの小定理＞　をまとめてみました。（第１３問の証明は次回に予定）

p が素数で、a が p と互に素（ a が p の倍数でない）　のときは、a^{p-1} を p で割ると 1 余る。ただし、a は正整数とする。

（補題）　m、n は任意の整数、p が素数のときは $(m+n)^p \equiv m^p + n^p \pmod{p}$

（∵）　$(m+n)^p = m^p + n^p + \{{}_pC_1\,m^{p-1}n + {}_pC_2\,m^{p-2}n^2 + \cdots + {}_pC_{p-1}\,m\,n^{p-1}\}$

ここで，$1 \leqq r \leqq p-1$ として　${}_pC_r = \dfrac{p(p-1)(p-2)\cdots p-n+1)}{r!} = p \cdot \dfrac{(p-1)(p-2)\cdots p-r+1)}{r!}$

${}_pC_r$ が整数で、p が素数だから $\dfrac{(p-1)(p-2)\cdots p-r+1)}{r!} = k$（整数）とでき　${}_pC_r = pk$ となる。

だから ${}_pC_r \equiv 0 \pmod{0}$　　∴　$(m+n)^p \equiv m^p + n^p \pmod{p}$

（略証-本題に戻って）　m=n=1 として $2^p \equiv 1^p + 1^p \equiv 1+1 \equiv 2 \pmod{p}$

m=2、n=1 として $3^p \equiv 2^p + 1^p \equiv 2+1 \equiv 3 \pmod{p}$

・・・　$k^p \equiv k \pmod{p}$　と仮定すると

m=k、n=1 として $(k+1)^p \equiv k^p + 1^p \equiv k+1 \pmod{p}$

数学的帰納法により、$a^p \equiv a \pmod{p}$ よって $a^p - a \equiv a(a^{p-1}-1) \equiv 0 \pmod{p}$

a、p が互に素だから $a^{p-1}-1 \equiv 0 \pmod{p}$、即ち、$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$