「BLUE BACKS やじうま入試数学 問題に秘められた味わいのツボ 金重明」中央 BC 410 キ　(2/2)
「2021.4.β」と同様、「 数学散歩 寄り道-5 2017.10.?」でも紹介。併せて点検をよろしく。
ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜問題、略解、解説など＞

第１３問　フェルマーの大定理もどき（問題再掲、「寄り道-5」では証明略）

次を証明せよ。
⑴　任意の自然数 a に対し、a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 である。
⑵　自然数 a、b、c が $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たすと仮定すると、a、b、c はすべて 3 で割りり切れなければならない。
⑶　$a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たす自然数 a、b、c は存在しない。　（九州大学）

（略証）⑴　a は自然数だから、m を 1 以上の自然数として a = 3m−2、3m−1、3m とできる。
$a^2 = (3m-2)^2 = 3(3m^2-4m+1)+1$ 、$(3m-1)^2 = 3(3m^2-2)+1$ 、$(3m)^2 = 3(3m^2)$
よって、　a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 である。
⑵　a または b が 3 で割り切れないとすると、⑴より a^2+b^2 を 3 で割った余りは 1 か 2 で 3 の倍数になるには、a、b ともに 3 の倍数でなければならない。a = 3m、b = 3n として
$3c^2 = (3m)^2+(3n)^2 = 9m^2+9n^2$ だから $c^2 = 3(m^2+n^2)$　∴　c も 3 の倍数。
⑶　$a^2 + b^2 = 3c^2$ …①　とすると、⑵より a、b、c はともに 3 の倍数。
$a = 3m_1$、$b = 3n_1$、$c = 3k_1$　（m_1、n_1、k_1 は自然数）　①に代入して 9 で割れば、
$m_1^2 + n_1^2 = 3k_1^2$　同様に繰り返して $m_2^2 + n_2^2 = 3k_2^2$　・・・、
$a>m_1>m_2>m_3>\cdots$、　$b>n_1>n_2>n_3>\cdots$、　$c>k_1>k_2>k_3>\cdots$、
変数は自然数で 1 以上だから不可能。自然数 a、b、c は存在しない。
（本によれば、ﾌｪﾙﾏｰの得意技「無限降下法」とか）

第１６問　世界一短い入試問題？　（再掲、「寄り道-5」）

tan 1°は有理数か。　（京都大学）

（本では ここで役に立ちそうな公式として、tan の加法定理をあげている。）
（略解）　tan 1° = p_1（有理数）とする。自然数 k に対して tan k° = p_k（有理数）と仮定すると、
tan (k+1)° = tan (k° + 1°) = $(p_k + p_1) / (1 - p_k \cdot p_1)$ も有理数。
数学的帰納法により、すべての自然数 n に対して　tan n°は有理数となる。
ところが　tan 30° = $1 / \sqrt{3}$（無理数）となり矛盾。よって tan 1°は無理数である。

第２２問　受験参考書が間違えた問題

ジョーカーを除いた除いたトランプ 52 枚の中から 1 枚のカードを抜き出し、表を見ないで箱の中にしまった。そして、残りのカードをよく切ってから 3 枚抜き出したところ、3 枚ともダイヤであった。このとき箱の中のカードがダイヤである確率を求めよ。　（早稲田大学）

（本文から）　・・・ある受験参考書が正解を 1/4 と解説したこともあって、当時ずいぶんと話題になったという。・・・
（略解）　問題の最初の一文「ジョーカー…箱の中にしまった。」で、ここまでで終われば、箱の中がダイヤである確率は 52 枚のうちダイヤは 13 枚あるから確率は 13/52 = 1/4 で受験参考書の正解と同じになる。問題の最後までを考えると、「条件付き確率」などと大袈裟にすることなく、抜き出した 3 枚のカードは 3 枚ともダイヤで、ダイヤの残りは 13-3=10 枚、不明のカードは最初の 1 枚を加えて 52-3 = 49 枚だから、求める確率は 10/49 となる。
（本では）条件付き確率のやり方で 10/49 になるきちんとした解説を加えている。その後、次の話題
＜全米騒然！「モンティ・ホール問題」の考え方＞　を紹介。
（本から）この条件付き確率の問題で、アメリカ中が大騒ぎになった事件があった。テレビの人気司会者モンティ・ホールが司会をするゲーム番組が論争の発端だったので、・・・
この問題は「数学散歩 Ⅳ-1 2015.12.β」で扱っており、再度、問題のみ紹介する。参考にされたい。
＜第３５話＞から　「ヤギ問題とベイズの公式」

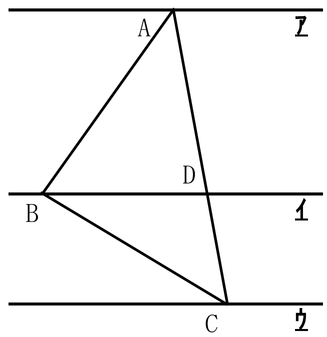
クイズ番組での話。最終戦に勝ち残った回答者は３つのドアから１つを選ぶ。どれか１つのドアの向こうには賞品の車が隠されている。残りの２つのドアの背後には、はずれの印にヤギが置かれている。回答者はまずドア１を選んだ。すると司会者は、ドア３を開けて見せるとヤギが置かれていた。回答者には、もう１度変更のチャンスが与えられる。ドア１を変更してドア２にした方がよいかどうか。

第２５問　金重明先生のすばらしい解法

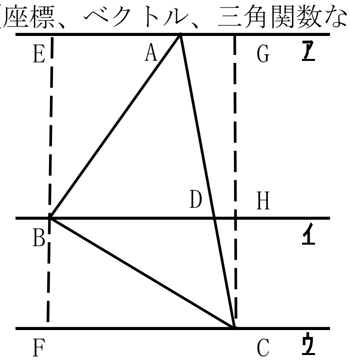
直角三角形 ABC を図のように 3 本の平行な直線 ア、イ、ウ の上にあるようにおいた。角 B は直角で ア と イ の幅は 5 cm、イ と ウ の幅は 3 cmである。

イ が辺 AC と交わる点を D とすると、BD の長さは何cmか。

(武蔵中学校を改題)



(座標、ベクトル、三角関数などいろいろ遊べそうです。)



(「小学６年生の驚くべき解法」として次のような証明を)

(略解 図参照)

図のように点 B、C を通り 3 本の平行線 ア、イ、ウ に垂直な 2 直線 EBF、GHC を引く。

△AEB ≡ △BFC より AE = BF = HC = 3 cm、
GH = EB = FC = EG = BH = 5 cm

△CAG ∽ △CDH より AG : DH = GC : HC = (GH+HC) : HC = 8 : 3
AG = EG − AE = 5 − 3 = 2 cm

よって　$DH = \frac{3}{8} \times 2 = \frac{3}{4}$ cm

$\therefore \quad BD = BH - DH = 5 - \frac{3}{4} = 4\frac{1}{4}$ cm

---

＜余白を利用して＞

「中学の知識でオイラーの公式がわかる $e^{i\pi} = -1$ 鈴木貫太郎 光文社新書」　分館 BC 413.5 ス

数学教育関係者には、できれば一読をすすめたい本です。授業の反省材料になるかもしれません。

(参考として、本の中の問題から)

$\log_{10} 2 = 0.3010$、　$\log_{10} 3 = 0.4771$、　$\log_{10} 7 = 0.8451$ を利用して 15^{50} の桁数と最高位の数を求めよ。 (早稲田大学)

(略解)　$X = 15^{50}$ とおく。$\log_{10} X = 50 \log_{10} 15 = 50 \log_{10} (30/2) = 50(\log_{10} 3 + 1 - \log_{10} 2)$
$= 50 \times 1.1761 = 58.805$　　$X = 10^{58.805}$

よって　$10^{58} < X < 10^{59}$　より X は 59 桁

$\log_{10} X = 58 + 0.805$

ここで　$\log_{10} 6 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 0.7781$ で　$\log_{10} 7 = 0.8451$ だから

$\log_{10} 6 < 0.805 < \log_{10} 7$ 、 $58 + \log_{10} 6 < \log_{10} X < 58 + \log_{10} 7$

よって　$6 \times 10^{58} < X < 7 \times 10^{58}$　　最高位の数字は 6