数学散歩　ＸⅦ-5　　　　　　　　　　　2021.7.α　　岐阜市　村山錞司

「数学パズル事典 改訂版 上野冨美男 編 東京出版」　　分館 410.7 ス

事典であり、いろいろな数学パズルが紹介されており楽しめます。気ままに拾ってみます。

次に示す例のように、＜答のみ＞のこともありますが、その分、楽しめます。

（例）(43p)　１３．転倒数

パズル３８　　数字を逆に書くと元の数の４倍になる５桁の数がただ１つある。その数はいくつか。

（解答）　２１９７８である。８７９１２＝２１９７８×４ となっている。

（本には、その他に解説などは何もなく上記の１行のみ。＜参考＞として私なりの答えを（M解）としてまとめてみました。（以後、同様））　（本パズルの（M解）については後掲）

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜パズル、話題、解説など＞

(7～8p)　数や図形のパズルへの関心

アルキメデスは円柱とそれに内接する球、および円錐の体積の比は ３：２：１ となることを発見した。（円、球の半径を r 、円柱、円錐の高さを 2r とすると　(M解は後掲)）

(26～27p)　最大公約数

パズル９　２０１９３　と　３２８０７　の最大公約数を、ユークリッドの互除法を用いないで求めることができるという。どんな方法か。

（ユークリッドの互除法）

1	20193	32807	1
	12614	20193	
1	7579	12614	1
	5035	7579	
1	2544	5035	1
	2491	2544	
	53	2491	47
		2491	

20193 = 53×381

32807 = 53×619

最大公約数は　53

（本の解は後掲）

（参考）

1	381	619	1
	238	381	
1	143	238	1
	95	143	
1	48	95	1
	47	48	
	1	47	

(42～43p)　最小公倍数

パズル３６　　２で割れば１余り、３で割れば２余り、４で割れば３余り、５で割れば４余り、６で割れば５余り、７で割れば６余り、８で割れば７余り、９で割れば８余る最小の数は何か。

＜ここまでの問の M解＞

パズル３８　　求める５桁の数を、$a\cdot 10000 + b\cdot 1000 + c\cdot 100 + d\cdot 10 + e$ とする。

題意から、a、b、c、d、e は整数で、$1 \leqq a \leqq 2$、$0 \leqq b$、c、$d \leqq 9$、$4 \leqq e \leqq 9$　逆に書くと４倍で、

$e\cdot 10000 + d\cdot 1000 + c\cdot 100 + b\cdot 10 + a = 4(a\cdot 10000 + b\cdot 1000 + c\cdot 100 + d\cdot 10 + e)$

∴　$39999a + 3990b + 300c = 9996e + 960d$　　3 で割って

$13333a + 1330b + 100c = 3332e + 320d$

a = 1 とすると、左辺は奇数で、右辺は偶数になり不適で、a = 2

$26666 + 1330b + 100c = 3332e + 320d$ より、$26666 - 3332e = 10(32d - 133b - 10c)$

$4 \leqq e \leqq 9$ で左辺が 10 の倍数になるのは、e = 8 のときのみ、左辺は 10 になり

$32d - 133b - 10c = 1$ 、 $d = \dfrac{133b + 10c + 1}{32} = 4b + \dfrac{5(b+2c) + 1}{32} \leqq 9$

より $4b<9$ で $b \leqq 2$ 、また分子から b は奇数で b = 1 のみ　$d = 4 + \dfrac{5c + 3}{16}$

$0 \leqq c \leqq 9$、c は奇数で c = 9 、d = 4+3 = 7

以上より、求める数は　21978　(87912 = 4×21978)

。　アルキメデスの比 ３：２：１

円柱：$2\pi r^3$、 球：$4\pi r^3/3$ 、 円錐：$2\pi r^3/3$　　3/2 倍すれば　3:2:1

パズル９　（本の解の概要）

２０１９３＋３２８０７　＝　５３０００　＝　$53\times 2^3\times 5^3$　　20193 = 53×381

２つの数のどちらも、２、５の倍数ではない。　　　32807 = 53×619

よって、最大公約数は　５３　　　（感想　さすが、パズルです。）

パズル３６　　（本の解から）　求める数を N とすると、

$N= 2a_1+1= 3a_2+2= 4a_3+3= 5a_4+4= 6a_5+5= 7a_6+6= 8a_7+7= 9a_8+8$　　より

$N+1 = 2(a_1+1)= 3(a_2+1)= 4(a_3+1)= 5(a_4+1)= 6(a_5+1)= 7(a_6+1)= 8(a_7+1)= 9(a_8+1)$

よって、N+1 は、2、3、$4=2^2$、5、6=2×3、7、$8=2^3$、$9=3^2$ の最小公倍数だから、

$N+1 = 2^3\times 3^2\times 5\times 7 = 2520$　　∴　N = 2519

(27〜30p)　　＜ピタゴラス数＞　（本を参考にして、思いつくまままとめてみた。）

各辺の長さがいずれも整数で表される直角三角形を「ピタゴラス三角形」といい、「ピタゴラス数」とは、ピタゴラス三角形の各辺の数を表す数の組をいう。

＜ピタゴラス数を与える一般式＞

正の整数 m、n（m＞n)に対して、　m^2-n^2、 2mn　、 m^2+n^2　はピタゴラス数になる。

（参考）原点中心の単位円　$x^2+y^2=1$ と直線 $y=\frac{m}{n}\cdot x-1$　の交点の座標から得られる。

本には面積の小さい順に 10 組のピタゴラス数が並べられているが、ここでは m、n の小さい順に

m	n	m^2-n^2	2mn	m^2+n^2	面積	本の順など	m	n	m^2-n^2	2mn	m^2+n^2	面積	本の順など
2	1	3	4	5	6	前ページにあり	6	1	35	12	37	210	5
3	1	8	6	10	24	相似形あり	6	5	11	60	61	330	7
3	2	5	12	13	30	1	7	1	48	14	50	336	相似形あり
4	1	15	8	17	60	2	7	2	45	28	53	630	10
4	3	7	24	25	84	3	7	3	40	42	58	840	相似形あり
5	1	24	10	26	120	相似形あり	7	4	33	56	65	924	
5	2	21	20	29	210	6	7	5	24	70	74	840	
5	3	16	30	34	240	相似形あり	7	6	13	84	85	546	9
5	4	9	40	41	180	4	8	1	63	16	65	504	8

＜双子ピタゴラス数＞

連続した２つの数の平方の和が平方数になるとき、その２つの数の組を双子ピタゴラス数

戦前の日本には６組しか紹介されていなかったとのこと。

パズル１３　ある連続した２つの整数の３桁になる平方数の和が平方数になるという。その３つの平方数は何だろうか。

パズル１４　ある連続した２つの整数の平方数の和を計算すると、５桁、６桁、８桁の平方数になるものがあるという。それぞれ３つの平方数の組を求められるだろうか。

。　双子ピタゴラス数をつくる２つの式

任意の整数 a、b に対して、

$a^2=b^2+(b+1)^2$ が成立すれば、　$(2a+3b+1)^2+(2a+3b+2)^2=(3a+4b+2)^2$ が成立する。

（略証）（左辺）－（右辺）　＝　$\{2(2a+3b)^2+6(2a+3b)+5\}-\{(3a+4b)^2+4(3a+4b)+4\}$

$=8a^2+24ab+18b^2+12a+18b+5-(9a^2+24ab+16b^2+12a+16b+4)=-a^2+\{b^2+(b+1)^2\}=0$

（疑問点　上の２つの式がどこから出てきたのか気になっています。情報があれば、よろしく。）

。　利用について

条件式で、b=0 とすると、a=1

a	b	2a+3b+1 (次のｂ)	2a+3b+2	3a+4b+2 (次のa)	$(2a+3b+1)^2$	$(2a+3b+2)^2$	$(3a+4b+2)^2$	
1	0	3	4	5	9	16	25	
5	3	20	21	29	400	441	841	パズル１３
29	20	119	120	169	14161	14400	28561	
169	119	696	697	985	484416	485809	970225	パズル１４
985	696	4059	4060	5741	16475481	16483600	32959081	
5741	4059	23660	23661	33461	559795600	559842921	1119638521	

(96p)　　＜覆面算＞　（異なる文字には、異なる１桁の整数が入る）

```
   A B
×  C D
   E A
 A B
 D C A
```

（本文から）この例では、１段目と４段目が同じであることから C=1で・・・次に E と B を加えたものが、11 になることも分かる。・・・ D と A の積が 9 以下であることから、A と D は 2〜4 の中から選ぶことになる。・・・

（M解）　(10A + B)×(10C + D) = (10A + B)×D + (10A + B)×10C

= (10A×D + B×D) + (<u>100A×C + 10B×C</u>)

= (10E + A) + (<u>100A + 10B</u>) = <u>100A + 10(B + E)</u> + A

= <u>100D + 10C</u> + A

```
   2 4
×  1 3
   7 2
 2 4
 3 1 2
```

下線より C = 1、D = A+1、B+E = 11、B×D ＞ A より B×D = A+10 、

また、A×D＜10 だから、A(A+1)＜10 で A≦2 、A≠C=1 だから、

A=2, D=3、B=4、E=7

(186p)　　＜カレンダーのパズル＞　　（参考　「数学散歩　ⅩⅦ-3」2021.6.α）

パズル１８７　うるう年ではない１年のうち、カレンダーが全く同じになる月が１組ある。それは何月と何月か。ただし祝日は無視する。（追加　うるう年では？）

（略解）1、3、5、7、8月の5か月は 31=7×4+ <u>3日</u>。2月は28=7×4 日。4、6、9月は 30=7×4+ <u>2日</u>

<u>3</u>×5+<u>2</u>×3=21=7×3 で、１月と１０月である。

うるう年では、3×3+1+2×2=14=7×2 より、１月と７月。なお、４月は31日がない。