数学散歩　ⅩⅦ-6　　　　　　　　　　2021.7.β　　岐阜市　村山錞司

「不思議な数列フィボナッチの秘密 アルフレッド・S・ポザマンティエ
イングマル・レーマン　杉浦俊輔・訳 日経BP社」　中央 410 ポ

いろいろ数学の本でよく見かける「フィボナッチ数列」、中央図書館で手にしたこの本は400頁余、手に負えない箇所もあり、私独断の解釈で性質、証明、解説など・・・を紹介します。

また、コロナ禍のため図書館は閉館、この本は返却済み。以前のメモ書きをもとにすすめます。

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜話題、問題、解説など＞

(62頁～)　性質のまとめ　　フィボナッチ数とリュカ数の関係式（n は n≧1 となる自然数とする）

0．　フィボナッチ数 F_n と リュカ数 L_n の定義

$F_1 = 1$、 $F_2 = 1$、 $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$　　1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …

$L_1 = 1$、 $L_2 = 3$、 $L_{n+2} = L_n + L_{n+1}$　　1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, …

（参考）　２つの数列の特性方程式は $t^2 = t + 1$ 、解は　$t = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

また、t で割って　$t = 1 + \dfrac{1}{t} = 1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{t}} = 1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{t}}}$

$= \cdots$

初期条件：　$F_1 = 1$、 $F_2 = 1$　と　$L_1 = 1$、 $L_2 = 3$　で一般項を求めれば、

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}$$

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

1．　連続する 10 個のﾌｨﾎﾞﾅｯﾁ数列の和は 11 で割り切れる。

（略証）　10 個の和：$F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + F_{n+5} + F_{n+6} + F_{n+7} + F_{n+8} + F_{n+9}$

$F_n = F_n$

$F_{n+1} = F_{n+1}$

$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$

$F_{n+3} = F_{n+1} + F_{n+2} = F_n + 2F_{n+1}$

+)　$F_{n+4} = F_{n+2} + F_{n+3} = 2F_n + 3F_{n+1}$

$F_{n+5} = F_{n+3} + F_{n+4} = 3F_n + 5F_{n+1}$

$F_{n+6} = F_{n+4} + F_{n+5} = 5F_n + 8F_{n+1}$

$F_{n+7} = F_{n+5} + F_{n+6} = 8F_n + 13F_{n+1}$

$F_{n+8} = F_{n+6} + F_{n+7} = 13F_n + 21F_{n+1}$

$F_{n+9} = F_{n+7} + F_{n+8} = 21F_n + 34F_{n+1}$

$F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + F_{n+5} + F_{n+6} + F_{n+7} + F_{n+8} + F_{n+9}$

$= (1+1+1+2+3+5+8+13+21)F_n + (1+1+2+3+5+8+13+21+34)F_{n+1}$

$= 55F_n + 88F_{n+1} = 11(5F_n + 8F_{n+1})$　　よって 11 で割り切れる。

4．　フィボナッチ数の最初のｎ項の和は、２つ後の項から１を引いたものに等しい。

$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$

（参考　Σ記号は行間の関係から使わない。最初の数番号は本から(以後、同様)）

（略証）　$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$　（n≧1）　より　$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$

$F_1 = F_3 - F_2$

$F_2 = F_4 - F_3$

・・・

$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$

+)　$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$

よって

$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - F_2$

$= F_{n+2} - 1$

5．　$F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$

（略証）　４．と同様に

$F_2 = F_1$

$F_4 = F_2 + F_3$

・・・

+)　$F_{2n} = F_{2n-2} + F_{2n-1}$

よって　前問の４．を利用して

$F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n}$

$(= F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_{2n-1}) = F_{2n+1} - 1$

6．　$F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$

（略証）　４．より　$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+2} - 1$

５．より　$F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$

上式-下式　$F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n+2} - F_{2n+1} = F_{2n}$

7．　$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$

（略証）（数学的帰納法によれば・・・）

8.　$F_n^2 - F_{n-2}^2 = F_{2n-2}$

（略証）　$F_n^2 = \{\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\}^2 = \frac{1}{5}\{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{2n} + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{2n} - 2(\frac{1-5}{4})^n\}$

$F_{n-2}^2 = \frac{1}{5}\{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{2n-4} + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{2n-4} - 2(\frac{1-5}{4})^{n-2}\}$

ここで　$(\frac{1-5}{4})^n = (\frac{1-5}{4})^{n-2} = (-1)^n$　だから

$F_n^2 - F_{n-2}^2 = \frac{1}{5}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{2n-4}\{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^4 - 1\} + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{2n-4}\{(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^4 - 1\}]$

$(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^4 - 1 = (\frac{6+2\sqrt{5}}{4})^2 - 1 = (\frac{3+\sqrt{5}}{2})^2 - 1 = \frac{14+6\sqrt{5}}{4} - 1 = \frac{10+6\sqrt{5}}{4}$

$= \frac{\sqrt{5}(6+2\sqrt{5})}{4} = \sqrt{5}\cdot(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2$

$(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^4 - 1 = (\frac{6-2\sqrt{5}}{4})^2 - 1 = (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^2 - 1 = \frac{14-6\sqrt{5}}{4} - 1 = \frac{10-6\sqrt{5}}{4}$

$= -\frac{\sqrt{5}(6-2\sqrt{5})}{4} = -\sqrt{5}\cdot(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2$

∴　$F_n^2 - F_{n-2}^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{2n-2} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{2n-2}\} = F_{2n-2}$

9.　$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$

（略証）　（左辺）$= \{\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\}^2 + \{\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}\}^2$

$= \frac{1}{5}[\{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{2n} + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{2n} - 2\cancel{(\frac{1-5}{4})^n}\} + \{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{2n+2} + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{2n+2} - 2\cancel{(\frac{1-5}{4})^{n+1}}\}]$

$= \frac{1}{5}[\{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{2n}(1+\frac{6+2\sqrt{5}}{4})\} + \{(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{2n}(1+\frac{6-2\sqrt{5}}{4})\}]$

$= \frac{1}{\sqrt{5}}\{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{2n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{2n+1}\} = F_{2n+1}$

11.　$F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$

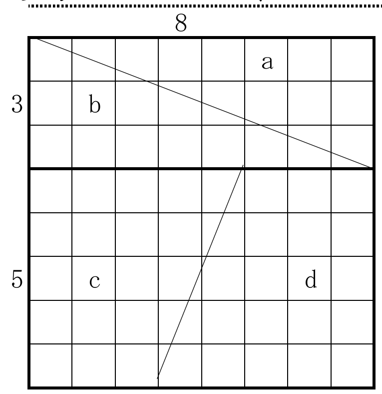
（略証）　$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$　を示す。

（左辺）$= \frac{1}{5}[\{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1}\}\{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}\} - \{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\}^2]$

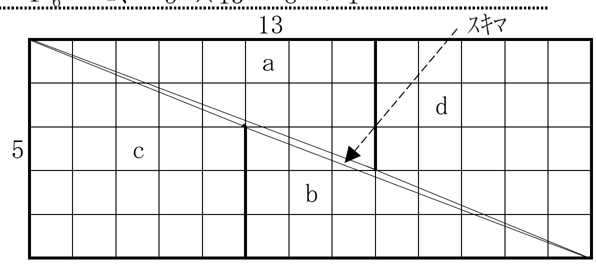
$= \frac{1}{5}[\cancel{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{2n}} + \cancel{(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{2n}} - (\frac{1-5}{4})^{n-1}\{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2\}$

$-\{\cancel{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{2n}} + \cancel{(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{2n}} - 2(\frac{1-5}{4})^n\}] = \frac{1}{5}\{(-1)^n\times 3 + 2(-1)^n\} = (-1)^n$

<参考>　11．から、　$n = 6$ として、　$F_5 F_7 = F_6^2 + 1$、　$5\times 13 = 8^2 + 1$



一辺の長さ 8 の正方形を 4 分割して、4 つを組み立てると、<u>1ﾏｽ 増</u> ？



$8^2 = 5\times 13 \underline{-1}$

・・・, 3, 5, 8, 13, ・・・　はﾌｨﾎﾞﾅｯﾁ数列

2, 3, 5, 8 と1, 2, 3, 5 では？　図を描いてみてください。（解は後掲）

11．の後半　$F_{n-k}F_{n+k} - F_n^2 = \pm F_k^2$　ただし、$n\geqq 1$、$k\geqq 1$

（略証）
（左辺）$= \frac{1}{5}[\{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-k} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-k}\}\{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+k} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+k}\} - \{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\}^2]$

$= \frac{1}{5}[\cancel{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{2n}} + \cancel{(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{2n}} - (\frac{1-5}{4})^{n-k}\{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{2k} + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{2k}\}$

$-\{\cancel{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{2n}} + \cancel{(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{2n}} - 2(\frac{1-5}{4})^n\}]$

$-2(-1)^n$

$= \frac{1}{5}[(-(-1)^{n-k})\{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^k\}^2 + 2\cancel{(\frac{1-5}{4})^k} + \cancel{2(-1)^n}]$

$= (-1)^{n-k+1}[\frac{1}{\sqrt{5}}\{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^k\}]^2 = \pm F_k^2$

（問）フィボナッチ数 F_n と リュカ数 L_n の負の方向へ拡張：空欄に数値を入れてください。（解は後掲）

n	・・・	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	・・・
フィボナッチ数 F_n	・・・									1	1	2	3	5	8	・・・
リュカ数 L_n	・・・									1	3	4	7	11	18	・・・

(107p)　　$L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$

（略証）（左辺）$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left\{1+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right\} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left\{1+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right\}$

$$\left[\begin{array}{l} 1+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{10+2\sqrt{5}}{4} = \frac{5+\sqrt{5}}{2} = 5\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \\ 1+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{10-2\sqrt{5}}{4} = \frac{5-\sqrt{5}}{2} = -5\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{array}\right]$$

$$= 5\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} = 5F_n$$

(247p)　　$5F_n + 3L_n = 2L_{n+2}$

（略証）　$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$、　$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

（左辺）　$= \sqrt{5}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} + 3\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$

$$= (3+\sqrt{5})\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\} + (3-\sqrt{5})\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\}$$

（ $3\pm\sqrt{5}=(6\pm2\sqrt{5})/2=(1\pm\sqrt{5})^2/2$ だから ）

$$= 2\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right\} = 2L_{n+2}$$

＜気になった記事＞

(118p)　　黄金比　$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(186p)　　多重根号　　$x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$

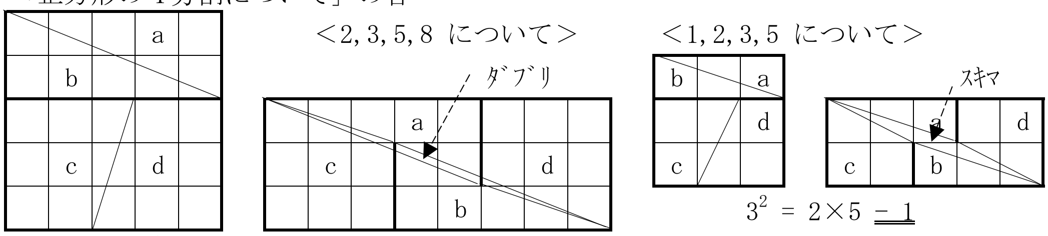
とおくと

$x^2 = 1 + \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}} = 1 + x$

$x > 0$ より　$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$　（黄金比）

(352p)　　フイボナッチ協会　１９６３年設立

「正方形の４分割について」の答



$5^2 = 3\times8 \underline{+1}$　　　$3^2 = 2\times5 \underline{-1}$

（問の答）＜フィボナッチ数 F_n と リュカ数 L_n の負の方向へ拡張＞

n	・・・	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	・・・
フィボナッチ数 F_n	・・・	13	-8	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8	・・・
リュカ数 L_n	・・・	-29	18	-11	7	-4	3	-1	2	1	3	4	7	11	18	・・・