数学散歩　ＸⅦ-7　　　　　　　　　2021.8. 8　　岐阜市　村山錞司

「不思議な数列フィボナッチの秘密 アルフレッド・S・ポザマンティエ
イングマル・レーマン　松浦俊輔 訳 日経BP社」　中央 410 ポ

参考として次の関係式を紹介します。「ＸⅦ-6」で扱った式もあります。

（お願い：前回「ＸⅦ-6」の３行目にある本の訳者名は「松浦俊輔」氏の誤りでした。訂正をよろしく。）

(245p)　　フィボナッチ関係式オンパレード　（番号は掲載順で、付け加えた数字です。）

n は n ≧ 1 となる任意の自然数　　　　　（本：性質のまとめ 0〜15）ＸⅦ-6

1	$F_1 = 1$、 $F_2 = 1$、 $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ （フィボナッチ数 F_n）	(性質 0)	0
2	$L_1 = 1$、 $L_2 = 3$、 $L_{n+2} = L_n + L_{n+1}$ （リュカ数 L_n）		
3	$11 \mid (F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + F_{n+5} + F_{n+6} + F_{n+7} + F_{n+8} + F_{n+9})$ 連続する 10 個のフィボナッチ数の和は 11 で割り切れる。	(性質 1)	1
4	$(F_n, F_{n+1}) = 1$　F_n と F_{n+1} の最大公約数は 1 （両者は互いに素）	(性質 2)	
(追加)	($F_4 = 3$)を除く合成数番のフィボナッチ数は合成数である。(参考 14)) 素数番は素数といっていいか。(× $F_2 = 1$(2 は素数だが、1 は素数でない))	(性質 3)	
5	$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$	(性質 4)	4
6	$F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$	(性質 5)	5
7	$F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$	(性質 6)	6
8	$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$	(性質 7)	7
9	$F_n^2 - F_{n-2}^2 = F_{2n-2}$	(性質 8)	8
10	$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$	(性質 9)	9
11	$F_{n+1}^2 - F_n^2 = F_{n-1} \times F_{n+2}$	(性質 10)	
12	$F_{n-1} \times F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$	(性質 11)	11
13	n ≧ 1、k ≧ 1 のとき $F_{n-k} \times F_{n+k} - F_n^2 = \pm F_k^2$		
14	$F_m \mid F_{mn}$ (F_{mn} は F_m で割り切れる。)	(性質 12)	
15	n が奇数のとき　$F_2F_1 + F_3F_2 + F_4F_3 + \cdots + F_{n+1}F_n = F_{n+1}^2$	(性質 13)	
16	n が偶数のとき　$F_2F_1 + F_3F_2 + F_4F_3 + \cdots + F_{n+1}F_n = F_{n+1}^2 - 1$		
17	$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + \cdots + L_n = L_{n+2} - 3$	(性質 14)	
18	$L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + \cdots + L_n^2 = L_nL_{n+1} - 2$	(性質 15)	

19　$F_n \times F_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n-1}$
（前の 12 で n-1 → n とすると同じ）

20　$F_{2k}^2 = F_{2k-1}F_{2k+1} - 1$　(12 で n = 2k)

21　$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}$　（補題）

22　$F_n = F_mF_{n+1-m} + F_{m-1}F_{n-m}$

23　$F_{n-1} + F_{n+1} = L_n$

24　$F_{n+2} - F_{n-2} = L_n$

25　$F_n + L_n = 2F_{n+1}$

26　$F_{2n} = F_nL_n$

27　$F_{n+1}L_{n+1} - F_nL_n = F_{2n+1}$

28　$F_{n+m} + (-1)^mF_{n-m} = L_mF_n$

29　$F_{n+m} - (-1)^mF_{n-m} = F_mL_n$

30　$F_nL_m - L_nF_m = (-1)^m2F_{n-m}$

31　$5F_n^2 - L_n^2 = 4(-1)^{n+1}$

32　$F_{n+1}L_n = F_{2n+1} - 1$

33　$F_n - F_{n-5} = 10F_{n-5} + F_{n-10}$

34　$3F_n + L_n = 2F_{n+2}$

35　$5F_n + 3L_n = 2L_{n+2}$　(247p)

36　$F_{n+1}L_n = F_{2n+1} + 1$

37　$L_{n+m} + (-1)^m L_{n-m} = L_mL_n$

38　$L_{2n} + 2(-1)^n = L_n^2$

39　$L_{4n} - 2 = 5F_{n2}^2$　(n2 → 2n ？)

40　$L_{4n} + 2 = L_{n2}^2$　(n2 → 2n ？)

41　$L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$　(107p)

42　$L_mF_n + L_nF_m = 2F_{n+m}$

43　$L_{n+m} - (-1)^m L_{n-m} = 5F_mF_n$

44　$L_n^2 - 2L_{2n} = -5F_n^2$

45　$L_{2n} - 2(-1)^n = 5F_n^2$

46　$L_n = F_{n+2} + 2F_{n-1}$

47　$L_n = L_1F_n + L_0F_{n-1}$

48　$L_{n-1}L_{n+1} + F_{n-1}F_{n+1} = 6F_n^2$

49　$F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3 = 3F_{3n}$

＜1 〜 18 の中で「ＸⅦ-6」 で扱った性質以外と 21 （補題） の証明＞

4　$(F_n, F_{n+1}) = 1$　F_n と F_{n+1} の最大公約数は 1 （両者は互いに素）

(略証)　（Ⅰ） $F_1 = 1$ 、$F_2 = 1$ は互いに素

（Ⅱ） F_k と F_{k+1} が互いに素であると仮定し、 F_{k+1} と F_{k+2} が公約数 b （>1） をもつとすると、$F_k = F_{k+2} - F_{k+1} = b(m - n)$ より　F_k と F_{k+1} が公約数 b をもち矛盾。

11　$F_{n+1}^2 - F_n^2 = F_{n-1} \times F_{n+2}$

(略証)　(左辺) = $(F_{n+1} - F_n)(F_{n+1} + F_n) = F_{n-1} \times F_{n+2}$ = (右辺)

14　　$F_m \mid F_{mn}$（F_{mn} は F_m で割り切れる。）

（略証）　$F_{mn} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{mn} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{mn}\right\}$　　$x = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m}$ 、 $y = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m}$

$x^n - y^n = (x - y)\ (x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + x^{n-4}y^3 + \cdots + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1})$

$= (x - y)P$　　とおく

$F_{mn} = (x^n - y^n)/\sqrt{5} = \{(x - y)/\sqrt{5}\}\cdot P = F_m \cdot P$　　よって　$F_m \mid F_{mn}$

15　　n が奇数のとき　$F_2F_1 + F_3F_2 + F_4F_3 + \cdots + F_{n+1}F_n = F_{n+1}{}^2$
16　　n が偶数のとき　$F_2F_1 + F_3F_2 + F_4F_3 + \cdots + F_{n+1}F_n = F_{n+1}{}^2 - 1$

（略証）（Ⅰ）　n=1 のとき、 $F_2F_1 = 1\cdot 1 = 1$、 $F_2{}^2 = 1^2 = 1$　　成立

n=2 のとき、 $F_2F_1 + F_3F_2 = 1 + 2 = 3$ 、 $F_3{}^2 - 1 = 4 - 1 = 3$　　成立

（Ⅱ）　n=2k−1 のとき　$F_2F_1 + F_3F_2 + \cdots + F_{2k}F_{2k-1} = F_{2k}{}^2$　と仮定すると、

n=2k のとき　$\underline{F_2F_1 + F_3F_2 + \cdots + F_{2k}F_{2k-1}} + F_{2k+1}F_{2k}$

$= \underline{F_{2k}{}^2} + F_{2k+1}F_{2k} = F_{2k}(F_{2k} + F_{2k+1}) = F_{2k}\cdot F_{2k+2}$

$= F_{2k+1}{}^2 + (-1)^{2k+1} = F_{2k+1}{}^2 - 1$　（ 12（性質11）より）　　成立

n=2k+1 のとき　$\underline{F_2F_1 + F_3F_2 + \cdots + F_{2k+1}F_{2k}} + F_{2k+2}F_{2k+1}$

$= \underline{F_{2k+1}{}^2 - 1} + F_{2k+2}F_{2k+1} = F_{2k+1}\cdot(F_{2k+1} + F_{2k+2}) - 1$

$= F_{2k+1}\cdot F_{2k+3} - (-1)^{2k+2} = F_{2k+2}{}^2$　（ 12（性質11）より）　　成立

（Ⅰ）、（Ⅱ）から数学的帰納法より、任意の自然数 n について 15、16 は成立

17　　$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + \cdots + L_n = L_{n+2} - 3$

（略証）　$L_{n+2} = L_n + L_{n+1}$　（$n \geqq 1$）　より　$L_n = L_{n+2} - L_{n+1}$

$L_1 = L_3 - L_2$

$L_2 = L_4 - L_3$

$\cdots$

$L_{n-1} = L_{n+1} - L_n$

+)　$L_n = L_{n+2} - L_{n+1}$

よって

$L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_n = L_{n+2} - L_2$

$= L_{n+2} - 3$

18　　$L_1{}^2 + L_2{}^2 + L_3{}^2 + \cdots + L_n{}^2 = L_nL_{n+1} - 2$

（略証）（Ⅰ）　n=1 のとき、 $L_1{}^2 = 1^2 = 1$ 、 $L_1L_2 - 2 = 1\cdot 3 - 2 = 1$　　成立

（Ⅱ）　n=k のとき　$L_1{}^2 + L_2{}^2 + \cdots + L_k{}^2 = L_kL_{k+1} - 2$　　を仮定すると

n=k+1 のとき　$\underline{L_1{}^2 + \cdots + L_k{}^2} + L_{k+1}{}^2 = \underline{L_kL_{k+1} - 2} + L_{k+1}{}^2$

$= L_{k+1}(L_k + L_{k+1}) - 2 = L_{k+1}L_{k+2} - 2$

（Ⅰ）、（Ⅱ）から、数学的帰納法により成立

21（補題）　$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}$

（略証）　（右辺） $= \frac{1}{\sqrt{5}^2}\left[\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m-1}\right\}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right\}\right.$

$\left. + \left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m}\right\}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}\right]$

$= \frac{1}{5}\left[\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m+n-1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m+n-1} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right.\right.$

$\left. - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m-1}\right\} + \left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m+n+1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m+n+1}\right.$

$\left.\left. - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m}\right\}\right]$

$= \frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m+n-1}\left\{1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right\} + \left\{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m+n-1}\left\{1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right\}\right.$

$- \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m-n-1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m-n-1}\right\}$

$- \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m-n-1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m-n-1}\right\}$

$\left(1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{10+2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}(1+\sqrt{5})}{2}\right.$ 、 $\left. 1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{10-2\sqrt{5}}{4} = -\frac{\sqrt{5}(1-\sqrt{5})}{2}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m+n} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m+n}\right\} = F_{m+n}$

（本では、数学的帰納法を利用。（Ⅰ）n=1、n=2 を示し、（Ⅱ）n=k−1、n=k の成立を仮定して、n=k+1 の関係式を証明・・・）